DEVOIR MAISON 3BIS : VARIATIONS DE FONCTIONS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

1. $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 - 9 + 10 = (x-3)^2 + 1$

2. **a.** Soit $h \in \mathbb{R}$. On utilise la forme canonique du trinôme, plus simple pour ces calculs.
$f(3-h) = \sqrt{(3-h-3)^2+1} = \sqrt{(-h)^2+1} = \sqrt{h^2+1}$.
$f(3+h) = \sqrt{(3+h-3)^2+1} = \sqrt{h^2+1} = f(3-h)$.

b. Lorsque h parcourt $\mathbb{R}$, on peut donc en déduire que les points donnés sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 3$.

c. Ceci étant vrai pour tout $h \in \mathbb{R}$, on en déduit que la courbe représentative de f admet la droite $x = 3$ comme axe de symétrie.

3. a., b. On sait que la fonction $\sqrt{u}$ possède les mêmes variations que u, pour toute fonction u positive.
De plus, on sait établir les variations de la fonction trinôme $u : x \longmapsto x^2 - 6x + 10$ depuis le premier chapitre. On a donc :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variations de u		↘	1	↗	
Variations de $f = \sqrt{u}$		↘	$\sqrt{1} = 1$	↗	

c. La fonction f admet pour minimum 1 atteint en $x = 3$.

4. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq 1$

a. $f(x) = M \iff \sqrt{x^2 - 6x + 10} = M^2$ car $x^2 - 6x + 10$ est toujours positif
$\iff x^2 - 6x + 10 - M^2 = 0$
On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (10 - M^2) = 36 - 40 + 4M^2 = -4 + 4M^2 = 4(M^2 - 1)$.
Comme $M \geq 1$, on a $\Delta \geq 0$.
Donc l'équation donnée admet une quand $M = 1$ ou deux solutions quand $M > 1$.

b. La phrase donnée signifie : « Pour tout M supérieur ou égal à 1, il existe un réel x tel que $f(x)$ soit supérieur ou égal à M.
On sait que pour tout $M \geq 1$, l'équation $f(x) = M$ admet une ou deux solutions.
S'il n'y a qu'une solution, on sait que $M = 1$. Il s'agit du minimum de f (qui n'est pas constante), donc il existe un x tel que $f(x) \geq M$, par exemple $x = 2$.
S'il y a deux solutions à cette équation, par symétrie de la courbe, on sait que l'une est dans $]-\infty; 3]$ et l'autre dans $[3; +\infty[$. Considérons celle dans l'intervalle $[3; +\infty[$ et appelons-la x_0.
Alors, d'après le tableau de variations de f, on sait que $f(x_0 + 1) > f(x_0) = M$. Donc on a trouvé un $x = x_0 + 1$, tel que $f(x) > M$ et la proposition est vraie.

c. On peut en déduire que $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut si x est assez grand. De plus, grâce à la symétrie, on en déduit le tableau de variations complets suivants :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

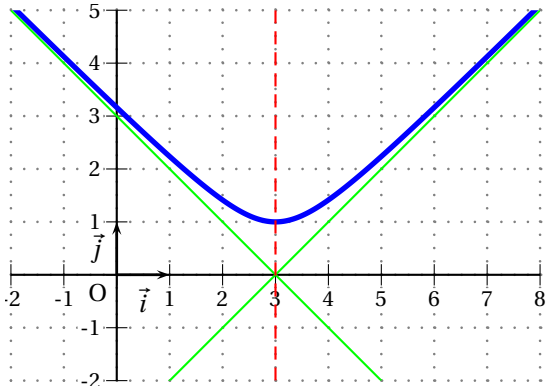
On dit que la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
On note ceci ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$**.** **On a aussi** ……

5. **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)+x-3} &= \frac{1}{f(x)+x-3} \times \frac{f(x)-(x-3)}{f(x)-(x-3)} \\ &= \frac{f(x)-(x-3)}{f(x)^2-(x-3)^2} \\ &= \frac{f(x)-(x-3)}{x^2-6x+10-(x^2-6x+9)} \\ &= \frac{f(x)-(x-3)}{1} = f(x)-(x-3)\end{aligned}$$

b. On sait que $f(x)-(x-3) = \dfrac{1}{f(x)+x-3}$.
Or $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut, à condition que x positif soit suffisamment grand, donc $f(x)+x-3$ aussi.
On en déduit que $\dfrac{1}{f(x)+x-3}$ peut être aussi petit que l'on veut, à condition que x positif soit suffisamment grand, et donc $f(x)-(x-3)$ aussi.
On dit que la limite de la fonction $f(x)-(x-3)$ quand x tend vers $+\infty$ est 0.
On note ceci ainsi ……

6.



Sur le graphique, on a représenté la courbe représentative de f. On constate que ses variations et son minimum sont conformes à ce que l'on a démontré en 3.
On remarque également son axe de symétrie $x = 3$, tracé en pointillés.
Graphiquement, on voit clairement qu'il y a une ou deux solutions à l'équation $f(x) = M$, pour tout $M \geq 1$.
Enfin, on a représenté les droites d'équation $y = x-3$ et $y = 3-x$.
Attardons-nous sur la première. La question 5b. nous a fait montrer que $f(x)-(x-3)$ pouvait être aussi petit que l'on voulait, à condition que $x > 0$ soit suffisamment grand. Graphiquement, cela signifie que l'écart entre la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x-3$ peut être aussi petit que l'on veut, à condition que x positif soit suffisamment grand. C'est pourquoi on voit que la courbe en gras se rapproche de plus en plus de la droite (sans jamais la toucher).
On dit que la droite $y = x-3$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Par symétrie, l'écart entre la courbe en gras et la droite d'équation $y = 3-x$ devient également aussi petit que l'on veut, à condition que x soit suffisamment grand dans les négatifs.
On dit que la droite $y =$ …… est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en …….