R.O.C : Restitution Organisée des Connaissances

Terminale S
Extrait d'annales

Table des matières

I) Géométrie

I-1 Nombres Complexes

Remarques :

- Pour les ROC sur les nombres conjugués, utiliser les écritures algébriques est souvent une bonne méthode.
- Pour les ROC sur les interprétations géométriques, cela s'avèrent en général inutile et compliqué.

Formules sur le conjugué

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Preuve

1. **Idée : Calculer séparément, en notation algébrique, les deux membres de l'égalité.**

   Notons $z = a + ib$ et $z' = c + id$ avec a, b, c et d quatre réels. Alors :

   $$\overline{z \times z'} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac - bd + i(bc+ad)} = ac + bd - i(bc+ad)$$

   D'autre part,

   $$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(bc+ad)$$

   Donc on a bien $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

2. **Idée : Faire une récurrence.**

   Initialisation : Pour $n = 1$, il est évident que $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$.

   Remarque : on vient égalément de démontrer que la propriété pour $n = 2$.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un $n \geq 1$ tel que $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$, on a alors :

   $$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^{n+1}$$

   La propriété est héréditaire et initialisée.

   Conclusion : Pour tout $n \geq 1$ on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Nature d'un nombre complexe et module

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Preuve

1. **et 2. Idées :**
   - **Calculer en notation algébrique $z+\overline{z}$ et $z-\overline{z}$.**
   - **Traduire sur l'expression algébrique le fait que z soit imaginaire pur ou réel.**

   Remarque : L'implication est évidente et pourrrait se faire sans la deuxième idée, mais la démarche présentée ici permet de montrer l'équivalence demandée.

   Notons $z = a + ib$ avec a et b deux réels. Ainsi :

   $$z+\overline{z} = a+ib+a-ib = 2a \quad \text{et} \quad z-\overline{z} = a+ib-(a-ib) = 2ib$$

   On en déduit immédiatement que :

   $$z \text{ est imaginaire pur} \Longleftrightarrow a = 0 \Longleftrightarrow z+\overline{z} = 0 \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$$

   $$z \text{ est réel} \Longleftrightarrow b = 0 \Longleftrightarrow z-\overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

3. **Idée : Utiliser les notations algébriques.**

   $$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iab - i^2b = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Formules sur le module

Prérequis : le module d'un nombre complexe z, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Preuve

Idée : aucune, on applique le prérequis à $z_1 z_2$ et à $\dfrac{1}{z}$.

– Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned}
|z_1 \times z_2|^2 &= z_1 z_2 \times \overline{z_1 z_2} \quad \text{d'après le prérequis} \\
&= z_1 \overline{z_1} \times z_2 \overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 |z_2|^2
\end{aligned}$$

Comme le module d'un nombre complexe est positif, on a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

– Soit z un nombre complexe. On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z}\right|^2 &= \frac{1}{z} \times \overline{\frac{1}{z}} \quad \text{d'après le prérequis} \\
&= \frac{1}{z} \times \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^2
\end{aligned}$$

Comme le module d'un nombre complexe est positif, on a $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Interprétation de l'argument d'un quotient

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On prend comme prérequis les résultats suivants :

- si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif;
- pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z, on a : $\arg(z) = (\vec{u}; \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

1. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2k\pi \text{ près, avec } k \text{ entier relatif.}$$

2. Démontrer que si A, B et C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

Preuve

1. **Idées :**
   - **Ecrire** $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ **pour appliquer le premier prérequis.**
   - **Appliquer ce résultat quand** $z = z'$ **pour démontrer** $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$**.**

   D'après le premier prérequis, pour tous z, z' on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \quad [2\pi]$$

   En particulier, si $z = z'$ on a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{z}\right) &= \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \quad [2\pi] \\ \iff \arg(1) &= \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

   Comme $\arg(1) = 0 \ [2\pi]$, on vient de montrer que pour tout z on a : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

   Finalement, en revenant à notre première égalité pour tous z, z', on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$$

2. **Idées :**
   - **Introduire** $\vec{u}$ **dans** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ **grâce à la relation de Chasles pour appliquer le deuxième prérequis.**
   - **Utiliser ce que l'on a démontré en 1.**

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) && \text{(Chasles)} \\ &= -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) + \arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) && \text{(deuxième prérequis)} \\ &= -\arg(b-a) + \arg(c-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi] && \text{(d'après le 1.)} \end{aligned}$$

Formules sur le module et l'argument

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta\ [2\pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres rels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{array}\right.$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right| \qquad \text{et} \qquad \arg\left(zz'\right) = \arg\left(z\right) + \arg(z')\ [2\pi]$$

Preuve

Idées :

- **Calculer zz' en notation trigonométrique**
- **Utiliser le deuxième prérequis pour en déduire le module et l'argument de ce nombre.**

Remarque : on peut aussi revenir aux écritures algébriques, mais c'est plus lourd, ou encore utiliser la formule $|z|^2 = z\overline{z}$ appliquée à zz'.

D'après le premier prérequis, on peut écrire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$

D'après le deuxième prérequis, on a alors :

$$zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

Ainsi, nous arrivons aux résultats :

$$|zz'| = rr' = |z||z'| \qquad \text{et} \qquad \arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

Ecriture complexe de la rotation

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

1. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
   Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.
2. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

Preuve

1. **Idée : aucune, il suffit de connaître ses formules**

   La relation (1) se traduit par $|z' - \omega| = |z - \omega|$.

   La relation (2) se traduit par : $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \quad [2\pi]$.

2. **Idée : En déduire $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ sous forme exponentielle.**

   Remarque : Attention à bien répondre à la question posée : on veut z' en fonction de z, θ et ω.

   On a $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1$. De plus, $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \quad [2\pi]$.

   Donc le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ peut s'écrire : $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$.

   On en déduit alors que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$,

   Ce qui équivaut à : $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$.

Ecriture complexe de la rotation

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

Preuve

Idées :

- **Rappeler les propriétés de la rotation.**
- **En déduire $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ sous forme exponentielle.**

On sait que si M' est l'image de M par la rotation r, alors :

$$\Omega M = \Omega M' \iff \frac{\Omega M}{\Omega M'} = 1 \iff \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \iff \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$$

De plus on sait que :

$$\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \theta \quad (2\pi) \iff \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad (2\pi)$$

Par conséquent le nombre complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

On en déduit alors que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

I-2 Espace (Produit Scalaire et Barycentre)

Equation d'une sphère de centre et de rayon donnés

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r, démontrer que $\mathscr{S}$ admet une équation de la forme :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

Preuve

Idée : aucune, il suffit de traduire l'appartenance d'un point M à $\mathscr{S}$ en termes de distance, puis de coordonnées.

$$M(x;y;z)\in\mathscr{S} \iff \Omega M^2=r^2 \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

Equation cartésienne d'un plan

On considère l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Montrer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ et un point $A(x_0;y_0;z_0)$ est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Preuve

Idées :
- **Remarquer qu'un point M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$,**
- **Traduire cela en termes de coordonnées.**

Remarque : Trouver une équation d'un objet signifie trouver une condition nécessaire et suffisante sous forme d'une égalité, sur les coordonnées d'un point pour qu'il y appartienne.

Pour tout point M de l'espace on a :

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in P &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ &\iff ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0 \end{aligned}$$

En posant $d=-ax_0-by_0-cz_0$ on obtient que

$$M(x,y,z)\in\mathscr{P} \iff ax+by+cz+d=0$$

Lieu géométrique

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.
Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\|=k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Preuve

Idée : aucune, il suffit d'introduire le barycentre suggéré

Soit G le barycentre des poitns (A,a), (B,b) et (C,c) (il exsite car $a+b+c\neq 0$.
Alors

$$\begin{aligned}
\|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\| &= \|a\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+b\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+c\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CM}\right)\| \\
&= \|(a+b+c)\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}\| \\
&= \|(a+b+c)\overrightarrow{MG}\| \qquad \text{car } G \text{ est le barycentre de } (A,a)\,,\,(B,b)\,,\,(C,c) \\
&= (a+b+c)MG
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points M tels que $\|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\|=k$ est l'ensemble des points M situé à la distance $\dfrac{k}{a+b+c}$ de G (ceci existe car $a+b+c\neq 0$.
Il s'agit de la sphère de centre G et de rayon $\dfrac{k}{a+b+c}$.

Distance d'un point à un plan

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_1,\ y_1$ et z_1, un système d'équations paramétriques de Δ.
2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.
   - **a.** Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.
   - **b.** Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_1,\ y_1$ et z_1.
   - **c.** En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Preuve

1. **Idées :**
   - **Expliquer pourquoi un point $M \in \Delta$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{n}$,**
   - **Traduire cela en termes de coordonnées.**

   On sait que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P, donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de Δ.
   Ainsi un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \Delta$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{n}$.
   En termes de coordonnées, cela donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - x_I &=& t \times a \\ y - y_I &=& t \times b \\ z - z_I &=& t \times c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_I + at \\ y &=& y_I + bt \\ z &=& z_I + ct \end{array}\right.$$

   Une équation paramétrique de la droite Δ est donc $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_I + at \\ y &=& y_I + bt \\ z &=& z_I + ct \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

2. H est un point de Δ, donc il vérifie lui aussi la relation de colinéarité :

$$\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

3. **Idée : Traduire $H = \Delta \cap \mathscr{P}$ par un système d'inconnue k à résoudre.**

   $H = \Delta \cap \mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérfient $\left\{\begin{array}{l} x_H = x_I + ak \\ y_H = y_I + bk \\ z_H = z_I + ck \\ ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \end{array}\right.$

   On en déduit que :
$$\begin{array}{rl} & a(x_I + ak) + b(y_I + bk) + c(z_I + ck) + d = 0 \\ \iff & k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0 \\ \iff & k = -\dfrac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{(car } a,\ b \text{ et } c \text{ ne sont pas simultanément nuls)} \end{array}$$

4. D'après le 2a., on a :

$$IH = |k|\|\overrightarrow{n}\| = \frac{\left|ax_I + by_I + cz_I + d\right|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\left|ax_I + by_I + cz_I + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance d'un point à un plan

Soit A le point de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls. Montrer que la distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est donné par :

$$d(A;\mathscr{P}) = \frac{|\,ax_A+by_A+cz_A+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Preuve

Idées :

- **Introduire le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$, ainsi qu'un vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathscr{P}$.**
- **Calculer $\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right|$ de deux manières différentes :**
  - **En remarquant que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.**
  - **En remarquant que les coordonnées de H vérifient l'équation de $\mathscr{P}$.**

Remarque : on peut aussi refaire la démonstration précédente à partir du 2.

Notons $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur P.
Nous savons que le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P.

Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
Autrement dit, il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$$

Par conséquent

$$\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right| = |AH\times||\vec{n}||\times\underbrace{\cos\left(\overrightarrow{AH}\,,\,\vec{n}\right)}_{\pm1}| = AH\times||\vec{n}||$$

De plus, $H\in P$ donc on a

$$ax_H+by_H+cz_H+d=0 \iff ax_H+by_H+cz_H=-d$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\right| &= \left|a(x_H-x_A)+b(y_H)-y_A)+c(z_H-z_A)\right|\\ &= |ax_H+by_H+cz_H-x_A-y_A-z_A|\\ &= |-d-ax_A-by_A-cz_A|\\ &= |ax_A+by_A+cz_A+d|\end{aligned}$$

Au final :

$$AH\times||\vec{n}|| = \left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|$$

$$\iff AH = \frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{||\vec{n}||} = \frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

II) Analyse

II-1 Suites

Convergence de deux suites adjacentes

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : Deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété : Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

Propriété : Toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Preuve

Idées :

- **Remarquer que pour tout n on a $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ pour utiliser la deuxième propriété.**
- **Etudier la limite de la différence.**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
La première propriété implique que pour tout n on a : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

Ainsi, (u_n) est une suite croissante majorée par v_0 : elle converge vers un réel l.
De même, (v_n) est une suite décroissante et minorée par u_0 : elle converge vers un certain réel l'.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = l' - l$. Mais d'après la définition donnée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Par unicité de la limite, on trouve $l' - l = 0 \iff l' = l$.
Donc les suites convergent vers la même limite.

Divergence vers $+\infty$ d'une suite croissante non majorée

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Preuve

Remarque : il s'agit de montrer que lorsqu'une suite est croissante et non majorée, pour n'importe quel nombre, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à ce nombre.

Idées :

- **Poser A un nombre quelconque.**
- **Traduire la non majoration de (u_n) par rapport à ce A, puis sa croissance,**
- **Conclure grâce à la définition.**

Soit A un nombre réel quelconque et (u_n) une suite croissante non majorée.

Puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe un certain entier, disons N, tel que : $u_N \geq A$
Puisque (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq N$ on a : $u_n \geq u_N \geq A$.

Ainsi pour tout réel A, tous les termes de (u_n) sont, à partir d'un certain rang N, supérieurs à A.
Par définition, nous pouvons conclure que (u_n) tend vers $+\infty$.

II-2 Exponentielle

Solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, où $a \in \mathbb{R}$

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Preuve

1. **Idée : aucune, il suffit de comparer $f'(x)$ et $af(x)$.**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$$
   Par conséquent f est solution de l'équation $y' = ay$.

2. **Idée : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = 0$ en utilisant la définition de g.**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{array}{rcll} h'(x) & = & g'(x)e^{-ax} + g(x) \times (-a)e^{-ax} & \text{(dérivée du produit de } g(x) \text{ et de } e^{-ax}) \\ & = & e^{-ax}\left(g'(x) - ag(x)\right) & \\ & = & e^{-ax} \times 0 & \text{car } g \text{ est solution de } y' = ay \\ & = & 0 & \end{array}$$
   Par conséquent, h est une fonction constante.

3. **Idée : aucune, il suffit de conclure.**

   D'après la question précédente si g est une solution de $y' = ay$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$g(x)e^{-ax} = K \Longleftrightarrow g(x) = Ke^{ax}$$
   Les solutions de l'équation $y' = ay$ avec a un réel donné sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ke^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Preuve

1. **Idée : aucune, il suffit de calculer séparemment $u'(x)$ et $au(x) + b$.**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\quad u'(x) = 0 \quad$ et $\quad au(x) + b = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = 0.$

   Par conséquent u est solution de l'équation $y' = ay + b$.

2. **Idée : Procéder par équivalences et utiliser le fait que $u' = au + b$.**

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff f' = af + b \\ &\iff f' - u' = af + b - u' \\ &\iff (f-u)' = af + b - (au + b) \qquad \text{puisque} u' = au + b \\ &\iff (f-u)' = a(f-u) \\ &\iff f - u \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = ay \end{aligned}$$

3. **Idée : aucune, il suffit d'appliquer le prérequis pour trouver l'expression de $f - u$ puis de f.**

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } y' = ay + b &\iff f - u \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = ay \\ &\iff (f-u)(x) = Ke^{ax} \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ d'après le prérequis} \\ &\iff f(x) = Ke^{ax} + u(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

   Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle

PRÉ-REQUIS :

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

Le but de cette question est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) :

$$z' = -(\lambda z + 1) \text{ telle que } z(0) = 1$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{\lambda}$ est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.
2. Montrer que z est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$ est équivalent à $z - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions z de l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$.
4. En déduire l'existence et l'unicité de la solution de (E'$_\lambda$) dont on donnera l'expression z_0

Preuve

1. **Idée : aucune, il suffit de calculer séparemment $f'(x)$ et $-(\lambda f(x) + 1)$.**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 0$ et $-(\lambda f(x) + 1) = -\left(\lambda \times \dfrac{-1}{\lambda} + 1\right) = 0$.

   Par conséquent, $f' = -(\lambda f + 1)$ et f est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.

2. **Idée : Procéder par équivalences et utiliser le fait que $f' = -(\lambda f + 1)$.**

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } z' = -(\lambda z + 1) &\iff z' = -(\lambda z + 1)\\
&\iff z' - f' = -(\lambda z + 1) - f'\\
&\iff (z - f)' = -(\lambda z + 1) - [-(\lambda f + 1)] \qquad \text{puisque } f' = -(\lambda f + 1)\\
&\iff (z - f)' = -\lambda z - 1 + \lambda f + 1\\
&\iff (z - f)' = -\lambda(z - f)\\
&\iff z - f \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = -\lambda y
\end{aligned}$$

3. **Idée : aucune, il suffit d'appliquer le prérequis pour trouver l'expression de $z - f$ puis de z.**

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } z' = -(\lambda z + 1) &\iff z - f \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = -\lambda y\\
&\iff (z - f)(x) = Ce^{-\lambda x} \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ d'après le prérequis}\\
&\iff z(x) = Ce^{-\lambda x} + f(x) = Ce^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

   Les solutions de $z' = -(\lambda z + 1)$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}$ où $C \in \mathbb{R}$.

4. **Idée : Trouver z_0 en utilisant sa forme générale et la condition initiale.**

   L'éventuelle solution z de (E'$_\lambda$) est donc de la forme $x \mapsto Ce^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}$ où $C \in \mathbb{R}$.

   On sait de plus que l'on doit avoir $z(0) = 1 \iff C - \dfrac{1}{\lambda} = 1 \iff C = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$.

   Ainsi (E'$_\lambda$) admet une unique solution qui est

$$z_0(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

Propriétés de la fonction exponentielle

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$

1. Démontrer que, pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
2. Démontrer que, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$

Preuve

1. **Idée : Appliquer le deuxième prérequis à x et $y = -x$.**

   Pour tout réel x, d'après le deuxième prérequis on a :

   $$e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

   On en déduit immédiatement $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. **Idée : Faire une récurrence.**

   Initialisation : pour $n = 0$.
   On a $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0\times x} = e^0 = 1$.
   Donc $(e^x)^0 = e^{0\times x}$ et la propriété est initialisée.

   Hérédité : On suppose qu'il existe un n tel que $(e^x)^n = e^{nx}$. Montrons alors que $(e^x)^{n+1} = e^{(n+1)x}$.

   $$\begin{aligned} (e^x)^{n+1} &= (e^x)^n \times e^x \\ &= e^{nx} \times e^x \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= e^{nx+x} \quad \text{d'après le prérequis} \\ &= e^{(n+1)x} \end{aligned}$$

   La propriété est héréditaire.

   Conclusion : La propriété est vraie pour tout n.

Croissance comparée

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On suppose connu les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérviée ;
- $e^0 = 1$
- pour tout réel x, on a $e^x > x$
- Soient deux fonctions ϕ et ψ définies sur $[A;+\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A;+\infty[$, $\psi(x) \leq \phi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

Preuve

1. **Idée : Dresser le tableau de variations de g.**

   Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ on a : $g'(x) = e^x - \dfrac{2x}{2} = e^x - x$.
   D'après le troisième prérequis, on a donc $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   De plus $g(0) = e^0 - 0 = 1$. D'où le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$1 \nearrow$

   Ainsi pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

2. **Idée : Transformer l'inégalité du 1. pour utiliser le dernier prérequis.**

   Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$g(x) \geq 0 \iff e^x \geq \frac{x^2}{2} \iff \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2} \quad \text{car } x > 0$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

   D'après le dernier prérequis, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Croissance comparée

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > x$.

Preuve

Idée : Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1 \Longleftrightarrow e^x = e^0 \Longleftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par conséquent $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e :

$$e^x - x > 0 \Longleftrightarrow e^x > x$$

Croissance comparée

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Preuve

Idée : Ecrire $x\mathrm{e}^{-x}$ en fonction de $\dfrac{e^x}{x}$.

Pour tout $x > 0$ on a $\quad x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
Par conséquent on a :

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$

II-3 Logarithme népérien

Propriétés du logarithme népérien

Prérequis : On rappelle que pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$ on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \text{et que} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Preuve

Idée : Appliquer le prérequis à a et $b = \frac{1}{a}$ et écrire $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

En particulier, pour $b = \frac{1}{a}$ on a :

$$\begin{aligned} & \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln(1) = \ln(a) - \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 = \ln(a) - \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(a) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Propriété du logarithme népérien

On suppose connue la propriété :
« Pour tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels strictement positifs, on a
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a
$\ln\left(\sqrt{m}\right) = \frac{1}{2}\ln(m)$.

Preuve

Idée : Ecrire $m = \sqrt{m} \times \sqrt{m}$.

Pour réel m strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} \ln(m) &= \ln\left(\sqrt{m} \times \sqrt{m}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{m}\right) + \ln\left(\sqrt{m}\right) \qquad \text{d'après le prérequis.} \\ &= 2\ln\left(\sqrt{m}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $m > 0$ on a : $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \frac{1}{2}\ln(m)$.

Croissance comparée

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Preuve

1. **Idée : Poser $X = \ln(x)$.**

   Pour tout $x > 0$, on pose $X = \ln(x) \iff e^X = x$.

   Alors quand x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.

   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ d'après le prérequis.

2. **Idée : aucune, il suffit d'utiliser ce qui précède (attention à l'initialisation cependant).**

   Si $n = 1$, on a déjà démontré le résultat.
   Si $n > 1$:
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$$
   Comme $n > 1$ on a $n-1 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$.
   Finalement on trouve :
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \times 0 = 0$$

Croissance comparée

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, positive sur $[1\,;\,+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
   a. Etudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
   c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}$.
   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

Preuve

1. **Idée : aucune.**
   a. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables.
   On a : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 0$.

   D'où le tableau de variations suivant :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$2-\ln(2)$	$\nearrow$	

   Il en résulte que f a un minimum pour $x = 4$ et $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - 2\ln 2 \approx 0,62$.

   b. D'après le tableau, il est clair que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ on a

$$f(x) > 0 \iff \sqrt{x} - \ln x > 0 \iff \sqrt{x} > \ln x \overset{x>0}{\iff} \frac{\sqrt{x}}{x} > \frac{\ln x}{x}$$

   Comme de plus $x > 1$, on a $\ln(x) > 0$, et pour tout $x > 1$, on obtient que $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

   D'après le « théorème des « gendarmes » on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. **Idée : Poser $X = x^{\frac{1}{n}}$.**
   Pour $x > 0$, on pose $X = x^{\frac{1}{n}} \iff x = X^n$. On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X^n)}{X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{n\ln(X)}{X} = \lim_{X\to+\infty} n\frac{\ln X}{X} = n \times 0 = 0$$

Dérivée de la fonction ln

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
A partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

Preuve

Idée : Faire le lien entre les quatre arguments et les remettre dans l'ordre.

Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

Or la fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On note $(\ln(x))'$ cette dérivée encore inconnue.
De plus, on sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ et $\big(\exp(x)\big)' = \exp(x)$.

On peut donc appliquer la formule de dérivation de $u \circ v$ avec $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = \ln(x)$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
(u\circ v)'(x) = v'(x)\times u'[v(x)] \quad &\iff \quad \big(\exp(\ln x)\big)' = 1\\
&\iff \quad (\ln(x))' \times \exp(\ln(x)) = 1\\
&\iff \quad (\ln(x))' \times x = 1\\
&\iff \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

II-4 Intégration

Conservation de l'ordre

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

Idée : Appliquer les prérequis à la fonction $(g-f)$.

Pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x) \iff g(x) - f(x) \geqslant 0$.

Comme de plus f et g sont continues sur $[a\,;\,b]$ on a $g-f$ est continue sur $[a\,;\,b]$.

On peut alors appliquer le premier prérequis à $u = g - f$. On obtient : $\displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Or $\displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ d'après le deuxième prérequis.

Finalement on a : $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

IPP

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Preuve

Idée : Intégrer membre à membre la formule : $(uv)' = u'v + v'u$ sur $[a;b]$.

On sait que pour tout $t \in [a;b]$ on a :

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

En intégrant membre à membre, sur le segment $[a;b]$, on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt$$

Or, une primitive de $(uv)'$ est par définition (uv). Ainsi :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt \iff \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

III) Probabilités

III-1 Probabilités discrètes

Formule des probabilités totales

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

1. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.
2. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

Preuve

1. **Idée : Ecrire $B = (B \cap A) \bigcup (B \cap \overline{A})$ (réunion disjointe).**

   On a $B = (B \cap A) \bigcup (B \cap \overline{A})$, et il s'agit d'une réunion disjointe, par conséquent :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$$

2. **Idée : Montrer que $p(\overline{A} \cap B) = p(B)p(\overline{A})$.**

   D'après le 1. on a : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) \iff p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$.
   D'où :

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap B) &= p(B) - p(A)p(B) \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= p(B)(1 - p(A)) \\ &= p(B)p(\overline{A}) \end{aligned}$$

Coefficients binomiaux

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve

Idée : aucune, il suffit de compter (et savoir trouver un dénominateur commun ...)

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!\left(p+n-p\right)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \end{aligned}$$

III-2 Probabilités continues

Loi exponentielle

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

Preuve

1. **Idée : Utiliser $P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$.**

   $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

   $$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 + \left(e^{-\lambda t} - 1\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

2. **Utiliser la formule de probabilité conditionnelle et le fait que $(X > t)\bigcap(X > t+s) = (X > t+s)$.**

   Soit s un réel strictement positif on a :

   $$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P\big((X > t)\bigcap(X > t+s)\big)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

   ce qui ne dépend pas du nombre t.
   Ainsi X suit bien une loi de durée sans vieillissement.