EXERCICES :

EXERCICE 1 — 5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2i$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.
Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i\left(\sqrt{3} + 1\right)$.
Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.
Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

EXERCICE 2 — 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2 + 4i$, $b = -4 + 2i$, $s = -5 + 5i$ et $\omega = -2 + 2i$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de h.

b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4 + 2i$ et que le point D a pour affixe $d = -2 - 4i$.

2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].

4. Soit P le milieu du segment [AC].

a. Déterminer l'affixe p du point P.

b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}i$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{P\Omega}\right)$.

5. Soit Q le milieu du segment [BD].
Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

EXERCICE 3 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3}+i \text{ et } z_C = \sqrt{3}+i.$$

1. **a.** Ecrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. **a.** Ecrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.
   a. Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3}-i$.
   b. Démontrer que les points C et O′ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z+\sqrt{3}+i\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 4 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 4 centimètres.
On considére la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z.$$

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = e^{i\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.
   b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.