DEVOIR SURVEILLÉ 3 : CORRECTION

Exercice 1 :

$$z_A = 1 \qquad z_B = 3+4i \qquad z_C = 2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3}) \qquad z_D = -2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})$$

1. **a.** L'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est :

$$z'-z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_A) \Longleftrightarrow z'-1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-1)$$

Donc l'image du point B a pour affixe

$$\begin{aligned} z'_B &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B-1)+1 = \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(3+4i-1)+1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+4i)+1 \\ &= -1-2i+i\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1 \\ &= -2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3}) = z_D \end{aligned}$$

Donc D est bien l'image de B par la rotation demandée.

b. On a donc $|z_D-z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B-z_A)| \Longleftrightarrow |z_D-z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}||(z_B-z_A)| \Longleftrightarrow AD = AB$
Les points B et D sont à égale distance de A. Ils sont donc sur le cercle de centre A et de rayon $AB = |z_B-z_A| = |2+4i| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

2. **a.** L'écriture complexe de l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$ est :

$$z'-z_B = \frac{3}{2}(z-z_B) \Longleftrightarrow z'-(3+4i) = \frac{3}{2}(z-(3+4i))$$

Donc l'image du point A a pour affixe

$$\begin{aligned} z'_A &= \frac{3}{2}(z_A-(3+4i))+(3+4i) = \frac{3}{2}(-2-4i)+3+4i \\ &= -3-6i+3+4i = -2i \end{aligned}$$

Donc F est bien l'image de A par l'homothétie demandée.

b. L'affixe du milieu de $[CD]$ est

$$\frac{z_D+z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})+2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i = z_F$$

Donc F est le milieu de $[CD]$.

c.

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} &= \frac{2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3}) - (-2i)}{1-(-2i)} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}\\ &= \frac{2\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{5} = \frac{-5i\sqrt{3}}{5} = -i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Or $-i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$. D'où :

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

On a alors que

$$\arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}\right) = \arg\left(\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Donc $(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
On en déduit que $(AF) \perp (CF)$.
Comme de plus F est le milieu de $[CD]$ on a même $(AF) \perp (CD)$.
D'où (AF) est donc la médiatrice de $[CD]$.

3. On place les points A, B et F dans le repère.
On trace la perpendiculaire Δ à (AF) passant par F.
On trace le cercle de centre A et de rayon AB.
Ce cercle coupe la droite Δ en deux points qui sont C et D.
Pour savoir lequel est lequel, on regarde le signe de leur partie réelle.

Exercice 2 : Amérique du Sud, Novembre 2007

1. a. Sachant que $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $\varphi' = \varphi$, montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
Pour tout réel x, $f(x) = \varphi(ax)$. f est donc une fonction dérivable.
De plus, pour tout réel x, $f'(x) = a\varphi'(ax) = a\mathrm{e}^{ax} = af(x)$.
f est donc solution de l'équation $y' = ay$

b. Si g est une solution de l'équation $y' = ay$, alors, pour tout réel x, $g'(x) = ag(x)$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
La fonction h produit de fonctions dérivables est dérivable et, pour tout réel x :

$$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$$

Donc h' est nulle sur $\mathbb{R}$ et h est une fonction constante.

c. D'après **1.b.**, si g est solution de $y' = ay$ alors g vérifie la propriété :
pour tout réel x, $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax} = K \iff g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$.
Réciproquement, si g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ alors , pour tout réel x, $g'(x) = aK\mathrm{e}^{ax} = ag(x)$. g est donc solution de l'équation $y' = ay$.
Donc les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\mathrm{e}^{ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

2. (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$. f_0 somme de fonctions dérivables est dérivable et

$$f_0'(x) = -a\sin x + b\cos x.$$

f_0 est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x &\iff -a\sin x + b\cos x = 2(a\cos x + b\sin x) + \cos x \\ &\iff (a+2b)\sin x + (2a-b+1)\cos x = 0 \qquad \text{quel que soit } x \text{ réel.} \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit que

$$\left\{\begin{array}{lll} 2a-b+1 & = & 0 \\ a+2b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 2a-b & = & -1 \\ a & = & -2b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} -5b & = & -1 \\ a & = & -2b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} b & = & \dfrac{1}{5} \\ a & = & -\dfrac{2}{5} \end{array}\right. .$$

Conclusion : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$ est une solution de (E).

b. D'après **1. c.** Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\mathrm{e}^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$.

c. f est solution de (E) si et seulement si , pour tout réel x, (1) : $f'(x) = 2f(x) + \cos x$.
Comme f_0 est aussi solution de (E), on a $f_0'(x) = f_0(x) + \cos x$:
Par différence membres à membres

$$(1) \iff f'(x) - f_0'(x) = 2\left(f(x) - f_0(x)\right)$$

et par linéarité de la dérivabilité :

$$(1) \iff \left(f(x) - f_0(x)\right)' = 2\left(f(x) - f_0(x)\right)$$

ce qui signifie que $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. D'après **2. b.**, on a donc f est solution de (E) si et seulement si, il existe un réel K tel que, pour tout réel x,

$$f(x) - f_0(x) = K\mathrm{e}^{2x} \iff f(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + K\mathrm{e}^{2x}$$

e. k est solution de (E), donc $k(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x + K\mathrm{e}^{2x}$.
Or $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \dfrac{1}{5} + K\mathrm{e}^{\pi} = 0 \iff K = -\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\pi}$.
On a donc $k(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x-\pi}$.

Exercice 3 : Antilles 2010

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

De plus $u_2 - u_1 = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{2} = u_1 - u_0$, par conséquent la suite (u_n) est arithmétique.

Enfin $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} \neq \frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$, par conséquent la suite (u_n) n'est pas non plus géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

b.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

c. Comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Par conséquent $v_n = \frac{1}{2^n}$

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a. Calculer $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ et le résultat de la question 2.(b), on a :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

c. Comme $w_{n+1} = 2 + w_n$, (w_n) est une suite arithmétique de raison 2.

d. Par conséquent $w_n = w_0 + nr = -1 + 2n$.

4. Pour tout entier naturel n

$$u_n = v_n \times w_n = \frac{1}{2^n} \times (2n-1) = \frac{2n-1}{2^n}$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

– *Initialisation* : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = -1$ donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$, par conséquent elle est initialisée.
– *Hérédité* Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n, montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. On veut donc montrer que :

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$$

On a :

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{2n+1-4n-6}{2^{n+1}} = 2 - \frac{4n+6-2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$$

Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, et donc on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 4 :

Partie A : Recherche de primitives

1. On a $F(x) = 3\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Pour $g(x)$, on reconnait la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^2 - x + 5$ et $u'(x) = 2x - 1$.
Donc $G(x) = \frac{(x^2 - x + 5)^4}{4} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

2. On reconnait la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.

Donc $h(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times 3$ et $H(x) = 3\sqrt{x^2+1} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

On cherche c tel que $H(0) = 1 \iff 3\sqrt{0^2+1} + c = 1 \iff 3 + c = 1 \iff c = -2$.

D'où $H(x) = 3\sqrt{x^2+1} - 2$.

Partie B : Etude de fonctions

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}(3x-1)=-\dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}(2x+1)=0$.

Donc le quotient $\dfrac{3x-1}{2x+1}$ tendra vers l'infini.

Pour savoir le signe, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur.

Le numérateur tend vers $-\dfrac{5}{2}$ qui est positif.

Pour le dénominateur, on a $x<-\dfrac{1}{2}\iff 2x+1<0$.

Finalement on trouve que $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{3x-1}{2x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-}\dfrac{3x-1}{2x+1}=+\infty$

2. Les limites en l'infini nous disent que $\mathscr{C}_f$ admet un asymptote horizontale $y=\dfrac{3}{2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Les limites en $\dfrac{1}{2}$ nous disent que $\mathscr{C}_f$ admet un asymptote verticale $x=-\dfrac{1}{2}$.

3. $F'(x)=\dfrac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)^2}=\dfrac{5}{(2x+1)^2}$

4.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\frac{5}{(2x+1)^2}$	$+$	$\|$	$+$
$F(x)$	$\frac{3}{2}\nearrow+\infty$	$\|$	$-\infty\nearrow\frac{3}{2}$

5. $\sqrt{2}\in]-\infty;1.5[$ donc d'après le tableau de variations de la fonction continue F, il existe une unique solution à l'équation $F(x)=\sqrt{2}$.

Elle se situe dans l'intervalle $]-0.5;+\infty[$.

6. On constate que $F'(x)=g(x)$ donc F est une primitive de g sur $]-0.5;+\infty[$.

La primitive cherchée est donc du type $G(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}+c$ où $c\in\mathbb{R}$.

On cherche c tel que $G(2)=1\iff\dfrac{3\times2-1}{2\times2+1}+c=1$.

Il suffit de prendre $c=0$. On a alors $G(x)=F(x)$ sur $]-0.5;+\infty[$.