EXERCICES : PROBABILITÉS DISCRÈTES

Définition 1 :

– Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé ...., ... ou encore ....
– L'ensemble de toutes les issues possibles *a priori* d'une expérience aléatoire est appelé .... On a pour habitude de noter cet ensemble Ω.
– Lorsque Ω est un ensemble fini, on appelle .... son nombre d'éléments, noté $Card(\Omega)$ ou $\#\Omega$.
– Une partie de Ω est appelé un .... C'est un sous-ensemble constitué d'issues de l'univers.

Exemple :

On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{\dots,\dots\}$ et $Card(\Omega) = \dots$
Remarquons que rien n'empêche d'ajouter l'issue « Tranche » à cet univers. C'est à l'énoncé de définir l'univers. En l'absence d'indication, on considère tacitement qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

Exemples :

– On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega =$ .... et $Card(\Omega) = \dots.$
– On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro obtenu est pair ou impair : $\Omega =$ .... et $Card(\Omega) = \dots.$
On remarque que l'univers dépend de l'observation qui est faite.
– On lance deux dés et on fait le produit P des nombres obtenus :
$\Omega_P =$ .... et $Card(\Omega) =$ ....
La partie $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ de l'univers est un événement qui peut se décrire par la phrase : « .... ».

Exemples :

Il existe aussi des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :
– Choisir au hasard un entier naturel $\Omega = \dots$ (ce type d'ensemble est dit *infini dénombrable*)
– Choisir au hasard un réel entre 0 et 1 : $\Omega =$ .... (*infini non dénombrable*)
– Choisir un nombre premier au hasard : $\Omega = \{\text{Nombres premiers}\}$ (*infini dénombrable*)

Dans tout ce chapitre, on considère désormais expérience aléatoire d'univers fini Ω (avec $\#\Omega = n$).

Définition 2 :

Une loi de probabilité P sur Ω est une application P de allant l'ensemble des parties de Ω à valeurs dans $[0;1]$, et qui vérifie les conditions :
– $P(\Omega) =$ ....
– $P(A\cup B) =$ .... pour toutes parties A et B **disjointes** de Ω (ie pour tous événements A et B **incompatibles**)

Remarques :

- L'univers peut contenir des événements impossibles, à partir du moment où l'on définit la loi P telle que leur probabilité soit nulle.
- Dans ce chapitre, nous n'allons considérer que des cas « discrets », ie où Ω est dénombrable.
  Dans le cas où Ω est un intervalle de temps par exemple, on ne peut pas dénombrer ces parties et la modélisation est différente. On parle alors de probabilité « continue ». Dans ces cas là, un événement de probabilité nulle (improbable) n'est pas forcément impossible...
- Loi des Grands Nombres :
  Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1. Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{\omega_i\}$

Exemple :

Modéliser à l'aide d'un tableau l'expérience suivante : « On lance deux pièces de monnaie et l'on note les faces obtenues. »

Propriété 1 :
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Preuve
Cela se déduit de la définition, grâce à la deuxième condition, puisqu'un événement est la réunion de ses événements élémentaires, qui sont deux à deux disjoints.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir au plus une fois pile ».

Proposition 1 : *Conséquences directes*
Pour tous événements A et B de Ω on a :

- $P(\emptyset) = \ldots\ldots$
- $P(\overline{A}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $P(A \cup B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

I-2 Une loi particulière

Définition 3 :
Lorsque l'on affecte la même probabilité à toutes les issues d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a .... ou que l'on a choisi une loi ....

Propriété 2 :
Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues} \ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{nombre d'issues} \ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Exemple :
On lance deux fois de suites un dé équilibré.

1. Représenter dans un tableau toutes les issues possibles.
2. Calculer la probabilité des événements :
   - A : « Obtenir un double »
   - B : « Obtenir deux numéros consécutifs »
   - C : « Obtenir au moins un six »
   - D : « Obtenir une somme supérieure strictement à 7 »

Attention !
Si on considère que l'univers est l'ensemble des sommes possibles (et non les couples de numéros), alors la loi n'est plus équiprobable

Exemple :
On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Quel est l'événement le plus probable :
- A : « Obtenir 2 piles et 2 faces »
- B : « Obtenir 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile » ?

Remarques :
- Si le dé (ou la pièce) est truqué alors on n'a plus l'équiprobabilité. L'énoncé fournit la loi de probabilité.
- Notons bien que dans certaines situations, l'expression « au hasard » mérite d'être expliquée.
  Imaginons que l'on dispose de deux bancs ayant chacun deux places (pl_1, pl_2) et (pl_3, pl_4). On suppose que toutes les places sont vides sauf la place pl_4. Arrive une personne à qui on demande de s'asseoir « au hasard ».. Quelle est la probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc ?
  Modèle 1 : on choisit une place équiprobablement parmi les 3. La probabilité est alors de $\frac{1}{3}$.
  Modèle 2 : on choisit un banc équiprobablement parmi les deux. La probabilité est alors $\frac{1}{2}$.
  Moralité : les énoncés sont toujours suffisamment précis pour ne pas vous donner de choix à faire. Cependant, de votre côté, quand vous écoutez des statistiques utilisant les probabilités, faites attention aux conclusions que tirent les journalistes, qui n'y connaissent rien ! On peut faire dire à peu près n'importe quoi aux probabilités suivant les choix de modèle.

I-3 Variable aléatoire : rappels

Travail de l'élève **1.** L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.
Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé. S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise. Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

Exercice 1 **:**
Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0,95, la deuxième de 0,93 et la troisième de 0,9.
On suppose que le moral de Prschtr est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses trois figures ?
2. Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ?
3. D'en manquer deux ?
4. De manquer les trois ?
5. Dresser alors le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
6. Manquer la première figure fait perdre 0,2 point et la deuxième ou la troisième 0,1 point. Les pénalités s'ajoutent.
   Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.