Exercices : Probabilités Discrètes

Exercice 1 :

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0,95, la deuxième de 0,93 et la troisième de 0,9.
On suppose que le moral de Prschtr est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses trois figures ?
2. Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ? D'en manquer deux ? De manquer les trois ?
3. Dresser alors le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Manquer la première figure fait perdre 0,2 point et la deuxième ou la troisième 0,1 point. Les pénalités s'ajoutent. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 2 :

Simplet, Goldorak et Monica Bellucci reviennent de la forêt avec trois paniers contenant respectivement 1, 2 et 3 champignons. Dans chaque panier, il y a un champignon vénéneux.
On choisit un des trois paniers au hasard, et dans ce panier on goûte un des champignons choisi lui aussi au hasard. Quelle est la probabilité de se tordre de douleur puis de succomber dans d'atroces souffrances quelques minutes après ?
Un élève syldave qui passait par là a choisi un panier au hasard puis un champignon dans ce panier. On constate qu'il se tord de douleur puis succombe dans d'atroces souffrances : quelle est la probabilité qu'il ait goûté un champignon venant du panier de Monica Bellucci ?

Exercice 3 :

Pour réussir une carrière politique en Corrèze, il faut une implantation locale. Dans cette perspective, un jeune énarque décide d'acquérir un château corrézien. Pour se faire connaître, il hante les commices agricoles du département. Il a ainsi deux chances sur trois d'être élu député. Si, par dessus le marché, il touche le derrière des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre. Il y a trois chances sur cinq pour que, son conseiller en communication lui ayant refilé le tuyau, il touche le derrière des vaches.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit élu député.
2. Il est député. Calculer la probabilité pour qu'il ait touché le derrière des vaches.

Exercice 4 : Polynésie juin 2010 — 3 points

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- A chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre ».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{4}{125}$.

3. On note F l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque ».
Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 5 : La Réunion Juin 2002 — 4 points

Dans un lot de 100 pièces toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 truquées.
La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\dfrac{3}{4}$.
La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\dfrac{1}{2}$.
On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.
La probabilité d'un événement A est notée $p(\text{A})$. On désigne par $\overline{\text{A}}$ l'événement contraire de A.
La probabilité conditionnelle de A sachant que l'événement B est réalisé est notée $p(\text{A}/\text{B})$.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
soit T l'événement : « la pièce est truquée »,
soit P l'événement : « on obtient PILE » .

- **a.** Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).
- **b.** Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
– si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
– dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.
On note E l'événement « la pièce est éliminée ».

- **a.** Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?
- **b.** Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?
- **c.** Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une piéce truquée et de l'avoir conservée ?

Exercice 6 : Amérique du Sud Nov 2004 — 5 points

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note A_0 l'événement; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
On note A_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
On note A_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires ».
Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.

2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note B_0 l'événement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »
On note B_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »
On note B_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »

- **a.** Calculer $p_{\text{A}_0}(\text{B}_0)$, $p_{\text{A}_1}(\text{B}_0)$ et $p_{\text{A}_2}(\text{B}_0)$.
- **b.** En déduire $p(\text{B}_0)$.

c. Calculer $p(\mathrm{B}_1)$ et $p(\mathrm{B}_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?

3. On considére l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
Montrer que $p(\mathrm{R}) = \frac{1}{3}$.

Exercice 7 : La Réunion juin 2010 — 4 points

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.
On note V_1, N_1 et R_1 (respectivement V_2, N_2 et R_2) la couleur obtenue au premier (respectivement second) jet.
Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. A l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Exercice 8 : Nouvelle-Calédonie Nov 2009 — 5 points

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

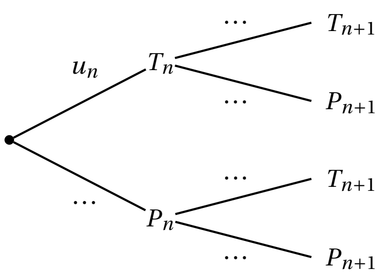
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = p(T_n)$ où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1. **a.** Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

b. Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

e. A l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

Exercice 9 : Centre Etrangers Juin 2008 — 4 points

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

a. un agent de maintenance ;

b. une femme agent de maintenance ;

c. une femme,

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche » ;
- B l'événement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 10 : Asie Juin 2010 **4 points**

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procéde à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'événement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'événement V_n.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

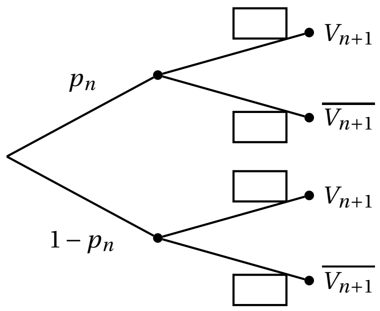
1. Calculer les probabilités des événements suivants :

a. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;

b. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.