Chapitre 7

Logarithme népérien et autres nouvelles fonctions

Hors Sujet

Titre : « Faites le mur »

Auteur : Banksy

Présentation succinte de l'auteur : Faites le mur ! est un film (?) ou un documentaire (documenteur !) réalisé par Banksy, sorti en salle le 15 décembre 2010. Thierry Guetta, un commerçant français excentrique, documentariste amateur vivant à Los Angeles, présenté dans le film comme le cousin de l'artiste Space Invader, aurait amassé une considérable archive d'interviews et d'action de Zevs, Shepard Fairey, André etc. A mesure qu'il filme de manière compulsive la nouvelle génération de l'art urbain, son obsession pour Banksy, le célèbre pochoiriste britannique se fait plus dévorante. Ils se rencontrent enfin. Banksy incite Guetta - au vu de la médiocrité de ses productions audiovisuelles - à se tourner vers l'art urbain. C'est alors que naît l'artiste Mr Brainwash.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 7

Logarithme népérien et autres nouvelles fonctions

Résumé

Très utile, le logarithme népérien permit aux mathématiciens de transformer les produits en sommes, simplifiant ainsi grandement les calculs. Mais ce n'est pas tout...
Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) en aboutissant malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

I) Diverses Présentations

I-1 Historique : transformant les produits en sommes

En STG, on présente le logarithme népérien historiquement, ie comme solution de l'équation fonctionnelle

$$f(a\times b) = f(a) + f(b)$$

Au début du $XVII^e$ siècle, afin de faciliter les calculs auxquels étaient confrontés les astronomes, navigateurs, financiers, etc, les mathématiciens cherchèrent à transformer les produits en sommes. Il est en effet plus aisé de calculer $113+254$ que 113×254. Cela revenait donc à rechercher les fonctions f vérifiant $f(ab) = f(a) + f(b)$.
En 1614, John NAPIER (en français Jean Néper..) établit des Tables de logarithmes (complétées au fil des ans par des mathématiciens). A partir de deux nombres a et b :

- on lit dans la table $\ln(a)$ et $\ln(b)$
- on calcule facilement $\ln(a)+\ln(b)$
- on cherche dans la table quel logarithme vaut cette somme,
- on lit alors dans la table le nombre correspondant. Il s'agit de ab !

a	$\ln(a)$
3	1.09861
4	1.38629
...	...
12	2.48490

C'est le début de la règle à calculs, très précise et permettant toutes sortes de calculs.

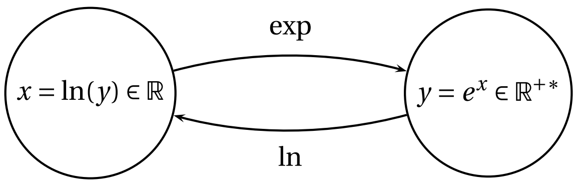
I-2 Primitive de la fonction inverse

Avant 2005, on présentait en S le logarithme comme la primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En effet, on montrera que si la fonction inverse admet une primitive (elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc c'est bien le cas), alors cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle de John.

I-3 Réciproque de la fonction exponentielle

Désormais en S, on aborde la fonction logarithme comme la fonction *réciproque* de la fonction exponentielle.

On se rappelle que la fonction exp est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait alors que pour tout $y > 0$, il existe un **unique** $x \in \mathbb{R}$, antécédent de y par la fonction exp, ie tel que $e^x = y$. On dit que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Grâce à l'unicité, on peut définir la fonction qui à y associe x. On l'appelle fonction réciproque de l'exponentielle. Il s'agit aussi d'une bijection, mais de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$



Remarque : On a donc $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\quad e^x = y \iff x = \ln y$

Définition 1 : *Propriété*
On appelle fonction **logarithme népérien** la fonction qui à tout $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^t = x$, d'inconnue t. On note $t = \ln(x)$ et on a donc

$$\forall x > 0, \quad e^{\ln(x)} = x$$

La fonction ln est appelée fonction *réciproque* de la fonction exp.

Remarques :
- Comme $x = e^t > 0$, $\ln(x)$ n'a de sens que si $x > 0$. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\ln(e^x)$ est solution de $e^t = e^x \iff x = t = \ln(e^x)$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(e^x\right) = x$$

- En particulier $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

Exemples :
Trouver les ensemble de définition des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(x+3)$ et $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$.
Résoudre $e^x = 5$, $\ln(x) = 5$ et $e^{e^x} = 3$.

Exercices du livre :
1 à 4 p 147

II) Propriétés algébriques

Théorème 1 :
La fonction ln transforme les produits en sommes, ie pour tout $a > 0$ et $b > 0$ on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Preuve
La fonction exponentielle transforme les sommes en produits donc $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$ En appliquant le logarithme à cette égalité on obtient :

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

Corollaire 1 :
Pour tous a et b strictement positif et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

1. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
4. $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Preuve

1. D'après le théorème on a $\ln b + \ln\frac{1}{b} = \ln b \times \frac{1}{b} = \ln 1 = 0$. D'où $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
2. On a :
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
3. On veut déjà démontrer « $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ».
   - *Initialisation* : Pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \times ł(a) = 0$. Donc la propriété est vraie.
   - *Hérédité* : On suppose qu'il existe un certain n tel que $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
   Regardons ce que vaut $\ln\left(a^{n+1}\right)$. On a :
   $$\begin{aligned} \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n \times a\right) \\ &= \ln\left(a^n\right) + \ln a && \text{d'après le théorème} \\ &= n\ln a + \ln a && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\ln(a) \end{aligned}$$
   La propriété est donc initialisée et héréditaire, par conséquent pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.
   Si désormais $n < 0$, alors $-n > 0$ et :
   $$\ln a^n = \ln\frac{1}{a^{-n}} = -\ln a^{-n} = -(-n\ln a) = n\ln a$$
4. $$\ln\lambda = \ln\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda} = \ln\sqrt{\lambda} + \ln\sqrt{\lambda} = 2\ln\sqrt{\lambda} \Longrightarrow \ln\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2}\ln\lambda$$

Exemples :

1. Ecrire à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres $A = \ln 144$ et $B = \ln 81 + \ln 3\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$. *Penser au domaine de validité*
3. Une voiture perd en moyenne 15% de valeur en un an. Au bout de combien d'années a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

Exercices du livre :

5 + 6 + 9 + 10 p 147 + 12 à 14

III) Variations et courbe

III-1 Sens de variation

Théorème 2 :
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ i.e

$$0 < a < b \Longleftrightarrow \ln a < \ln b$$

Preuve
On sait que pour tous a et b strictement positifs on a $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Donc :

$$\begin{aligned} & 0 < a < b \\ \Longleftrightarrow\ & 0 < e^{\ln a} < e^{\ln b} \\ \Longleftrightarrow\ & \ln a < \ln b \qquad \text{car } e^A < e^B \Longleftrightarrow A < B \end{aligned}$$

Ainsi nous venons de démontrer que le logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exemple :
Résolvons l'inéquation suivante $\ln(5-x) \leq \ln(3-2x)$

– *Domaine de validité* : Cette équation est définie pour tout x vérifiant

$$\begin{cases} 5-x > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

– *Résolution* : Ainsi pour tout $x < \dfrac{3}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} & \ln(5-x) \leq \ln(3-2x) \\ \Longleftrightarrow\ & 5-x \leq 3-2x \\ \Longleftrightarrow\ & x \leq -2 \qquad \text{ce qui est bien inférieur à } \frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de (I) est $\mathscr{S} =]-\infty;-2]$

Remarque : On a alors $\ln x < 0 \Longleftrightarrow \ln(x) < \ln(1) \Longleftrightarrow x \in]0;1]$.

Exercices du livre :
16 à 19 p 148

III-2 Continuité et dérivabilité

Théorème 3 :
La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Preuve **Hors Programme**
Admettons dans un premier temps que $\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et notons provisoirement $\ln'$ sa dérivée. Nous savons que $\exp(\ln x) = x$. En dérivant membre à membre on obtient

$$\ln'(x) \times \exp(\ln x) = 1 \iff \ln'(x) \times x = 1 \iff \ln' x = 1/x$$

Pour démontrer que le logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ (ce qui impliquera qu'elle est continue sur $]0;+\infty[$), on procède en 2 étapes :

1. Montrons que $\ln$ est continue en 1 i.e que $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$.
   Pour tout $x > -1$, on a

$$e^x \geq x+1 \iff \ln(e^x) \geq \ln(x+1) \iff x \geq \ln(x+1) \iff X-1 \geq \ln(X)$$

   en ayant posé $X = x+1$. Donc $0 < \ln X \leq X-1$ pour tout $X > 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$. Donc la fonction $\ln$ est continue en 1.

2. Etudions $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ (on considère h assez proche de 0 pour que $\ln(a+h)$ soit défini).

$$\ln(a+h)-\ln a = \ln\left(\frac{a+h}{a}\right) = \ln\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

   Posons $H = \ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right) \iff e^H = 1+\dfrac{h}{a} \iff h = a(e^H-1)$.

   La fonction $\ln$ étant continue en 1, on a $\lim\limits_{h\to 0} H = \lim\limits_{h\to 0} \ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right) = \ln(1) = 0$.
   D'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \lim_{H\to 0} \frac{H}{a(e^H-1)}$$

   Or, $\lim\limits_{H\to 0} \dfrac{e^H-1}{H} = 1$. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{a}$.

   La fonction $\ln$ est donc dérivable en tout $a > 0$ et son nombre dérivé est $\dfrac{1}{a}$.

Remarques :

– On retrouve de suite le sens de variation démontré précédemment.

– L'approximation affine de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$ au voisinage de 0 est

$$\begin{aligned} \ln(1+h) &\simeq \ln(1) + h\ln'(1) \\ &\simeq 0 + h\frac{1}{1} \\ \ln(1+h) &\simeq h \end{aligned}$$

– La tangente à la courbe représentative de la fonction $\ln$ au point $A(1;0)$ est la droite d'équation

$$\begin{aligned} T_1 : y &= ln'(1)(x-1) + ln(1) \\ &= 1(x-1)+0 \\ T_1 : y &= x-1 \end{aligned}$$

Propriété 1 :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Preuve
On sait que

$$(v \circ u)' = v'(u) \times u'$$

On applique ce résultat pour $v = \ln$.

Propriété 2 :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I. Une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction $\ln|u|$

Preuve
Comme u est dérivable sur I, elle est continue sur I. De plus elle ne s'annule pas sur I donc elle ne change pas de signe sur I.
On peut alors dériver $\ln|u|$ en considérant le cas $u >$ et le cas $u < 0$.

Exemples :

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

   a. $f(x) = \ln(x^2-9)$ sur $]3;+\infty[$.

   b. $g(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ sur $]2;+\infty[$

2. Etudier le sens de variation de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}$ sur l'intervalle $I = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$

Exercices du livre :

22 p 148

III-3 Limites

Théorème 4 :
Limites aux bornes de son ensemble de définition $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Ainsi la représentation graphique de la fonction $\ln$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ mais n'admet pas d'asymptote horizontale.

Preuve

Soit $M \in \mathbb{R}^{+*}$. Posons $A = e^M$, comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\forall x > A \Longrightarrow \ln x > \ln A = M$$

Quelque soit le réel M, il existe un rang au delà duquel $\ln x \geq M$, ce qui prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty$$

Exemple :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x^2+5}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{3x^2+5}{x-1}\right)$$

Théorème 5 : ***Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien***

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Remarque : On retiendra qu'en $+\infty$ et en 0, toute puissance de x l'emporte sur $\ln(x)$.

Preuve

1. On pose $X = \ln(x)$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a alors que X tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X}$$

Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. Donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

On en déduit alors pour $n \geq 2$ que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

2. On pose $X = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+ alors X tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = -0 = 0$$

On en déduit alors pour $n \geq 2$ que

$$\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to0^+} x^{n-1} \times x\ln x = 0 \times 0 = 0$$

3. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

Exemples :

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} \ln(x) \times \ln(1-x)$$

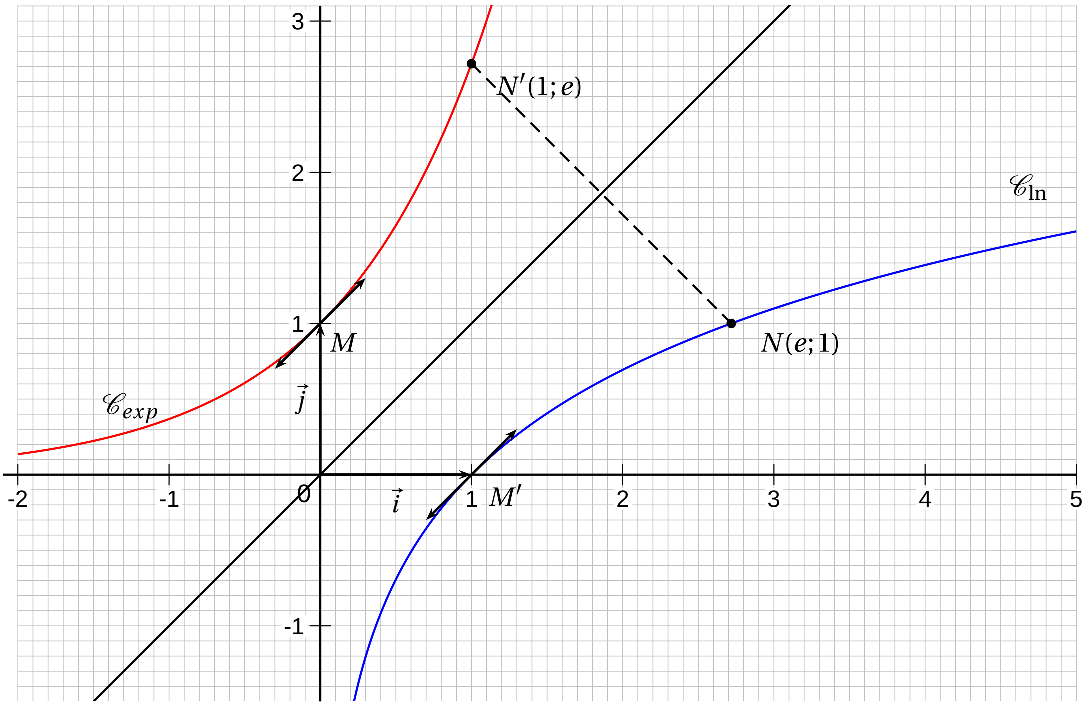
Exercices du livre :

23-24 p 148

III-4 Représentation graphique

Les courbes $\mathscr{C}_{exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (cf DM 7), par conséquent, on peut tracer la courbe représentative de la fonction $\ln$:

x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$		$+$		
Variation de $\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Exercices du livre :

Annales à trouver

IV) Autres nouvelles fonctions

Dans cette partie, a désigne un nombre réel strictement positif.

IV-1 Les fonctions « logarithme »

Définition 2 :
On appelle logarithme de base a la fonction, noté $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarques :
- Ces fonctions ont les mêmes règles de calculs que pour le logarithme népérien.
- Elles sont aussi continues et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, puisqu'elles sont un multiple de la fonction $\ln$
- La fonction logarithme en base e correspond au logarithme népérien.
- Ces fonctions permettent de simplifier des calculs. Grâce à elles, on sait que le plus grand nombre premier connu à ce jour ($2^{32582657} - 1$) possède près de 10 millions de chiffres !

IV-2 Les fonctions « exponentielles de base a »

Définition 3 :
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction, notée $\exp_a$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = e^{\ln(a^x)} = a^x$$

Remarques :
- La relation $\ln(a^n) = n\ln(a)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ se généralise à : $\ln(a^x) = \ln\left(e^{x\ln(a)}\right) = x\ln(a)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- Pour $a = 1$ on a $1^x = \exp_1(x) = e^{x\times\ln(1)} = e^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Propriété 3 :
On retrouve les règles sur les exposants entiers. En effet, pour tous $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $(a^x)^{x'} = a^{xx'}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $a^{x-x'} = \dfrac{a^x}{a^{x'}}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Preuve
On applique simplement la défintion et les propriétés des fonctions $\ln$ et exponentielle. Montrons les deux premiers pour exemple :

1. $(a^x)^{x'} = \left(e^{x\ln a}\right)^{x'} = e^{x'x\ln a} = a^{xx'}$
2. $a^{x+x'} = e^{(x+x')\ln a} = e^{x\ln a + x'\ln a} = e^{x\ln a}e^{x'\ln a} = a^x a^{x'}$

Exemples :
Simplifier

$$\frac{2^{-3,1}2^{6,4}}{4^{3,05}} \quad ; \quad \left(a^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \quad ; \quad 3^{5,1}4^{-5,1}$$

Attention !
On ne peut pas considérer des exposants réels pour des nombres négatifs ! Sinon, on arrive à montrer ce genre de chose

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Théorème 6 :
La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\exp_a'(x) = (a^x)' = (\ln(a))a^x$$

Preuve
Cette fonction est une composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle l'est aussi.
De plus, elle est de la forme e^u.

Corollaire 2 :
- Si $a > 1$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve
Pour tout réel x, $a^x > 0$. Et si $a > 1$ on a $\ln(a) > 0$, si $0 < a < 1$ on a $\ln(a) < 0$.

Proposition 1 :
- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Preuve
- Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$
  De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = 0$
  De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$

Par conséquent :

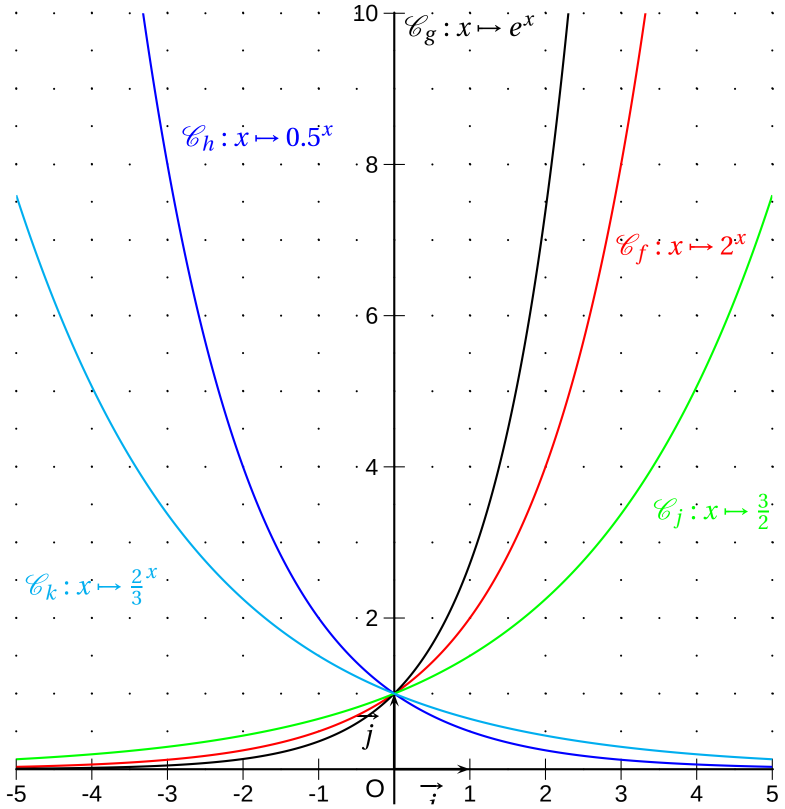
– Si $0 < \lambda < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$		$-$		
Variation de f_λ	$+\infty$ ↘	1 ↘	λ ↘	0

– Si $\lambda > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$		$+$		
Variation de f_λ	0 ↗	1 ↗	λ ↗	$+\infty$

Nous avons représentés les courbes des fonctions f, g, h, j et k respectivement pour $a = 2$, $a = e$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \dfrac{3}{2}$ et $a = \dfrac{2}{3}$.



Exemples :

Résoudre $5^x - 5^{1-x} = 4$, $\quad 2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$, $\quad 3 \times 4^x + 2 = 2^x$

IV-3 Les fonctions puissances

Définition 4 :

Soit α un réel. On appelle fonction puissance la fonction f_α définie sur $]0;+\infty[$ qui a x associe le réel $f_\alpha(x) = x^\alpha$

Remarques :

– Dans la pratique on note $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$.
– On note, du coup, la nécessité de définir la fonction sur $]0;+\infty[$

Exemple :

$f_3(x) = x^3 = e^{3\ln x}$ et $f_\pi(x) = x^\pi = e^{\pi \ln x}$

Théorème 7 :

Les fonctions puissances sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Preuve

$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x} \Longrightarrow f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \dfrac{\alpha}{x} \times \alpha^x = \alpha x^{\alpha-1}$

Exemple :

$f_\pi(x) = \pi x^{\pi-1}$

Remarque : $x \longmapsto e^{\frac{1}{n}} \ln x$ n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{n}} \ln x = 0$, la fonction admet donc un prolongement par continuité en 0.

Définition 5 : *Propriété*

Pour tout réel positif a et pour entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = a$.
Ce réel est noté $\sqrt[n]{a}$ et s'appelle la racine n-ième du réel positif a. On a :

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \text{et, pour } a > 0,\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Preuve

La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution à l'équation $x^n = a$ dans $[0;+\infty[$, notée $\sqrt[n]{a}$ par définition.
De plus si $a = 0$, on a bien $0^n = 0$. Donc 0 est solution aussi. Par unicité, on a $\sqrt[n]{0} = 0$.
Si $a > 0$, on a aussi que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a$. Par unicité de la solution on a $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Exemple :

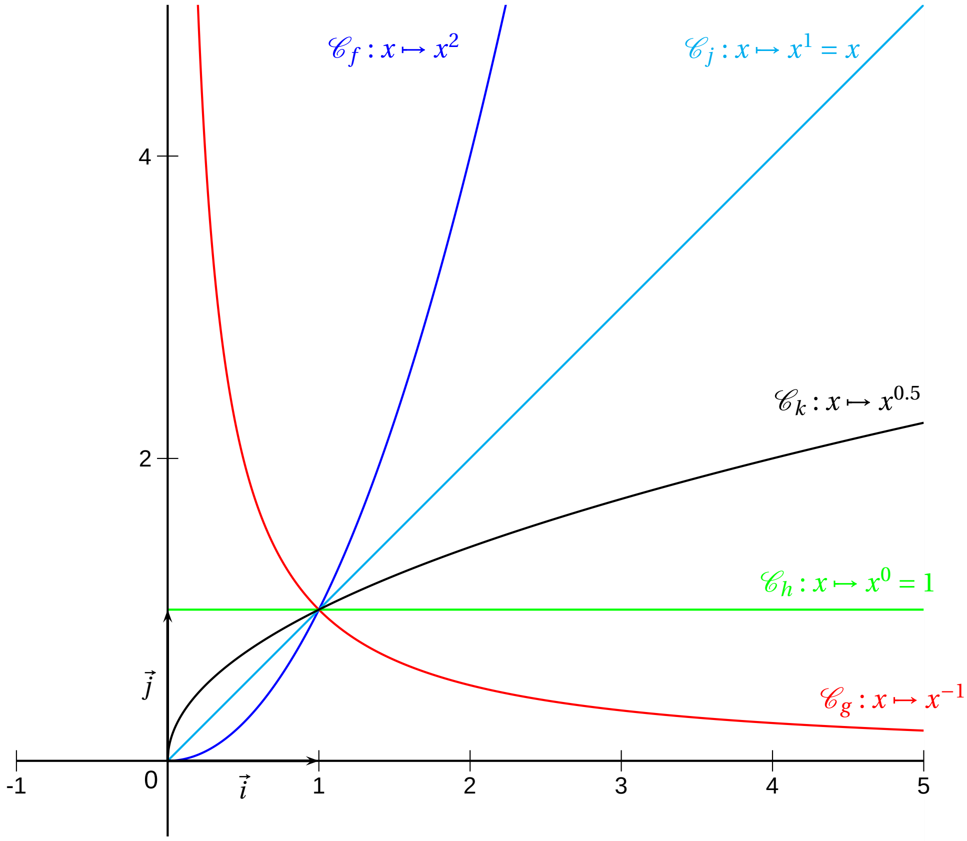
Simplifier l'écriture du réel

$$A = \sqrt[3]{162} \times \sqrt[4]{216}$$

Exemple :

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ sir $]0;+\infty[$.
2. Etudier les variations de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[3]{x^2 - 4}$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a tracé les courbes des fonctions f, g, h, j et k respectivement pour $\alpha = 2$ (bleu), $\alpha = -1$ (rouge), $\alpha = 0$ (vert) , $\alpha = 1$ (cyan) et $\alpha = 0.5$ (noir) :



Exercices du livre :

? ?