EXERCICES : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 :

Trouver les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' = \sin x$
2. $y' = 0$
3. $y'' = 0$
4. $y'' = x$
5. $y' = 5x(x^2+3)^4$
6. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Exercice 2 :

Les observations relevées pour l'étude d'une population p d'une bactérie dans une certaine préparation biologique ont conduit à envisager le modèle suivant :
- le temps t en heures
- p est une fonction de t dérivable sur $[0;+\infty[$ et $p' = 2,5p$ et $p(0) = 10$

1. Déterminer $p(t)$
2. Donner un ordre de grandeur de cette population au bout de 10 heures.

Exercice 3 :

Au début d'une épidémie, on constate que 0.01% de la population est contaminé. Pour t appartenant à $[0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0) = 0.01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0.05y(10-y)$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.
   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions :
   $$\begin{cases} y' = 0.05y(10-y) \\ y(0) = 0.01 \end{cases}$$
   si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions :
   $$\begin{cases} z' = -0.5z + 0.05 \\ z(0) = 100 \end{cases}$$
2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
   b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 4 :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intevalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) \quad xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$$

1. **a.** Démontrer que si f est solution de (E) alors la fontion g définie sur l'intevalle $]0;+\infty$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') \quad y'=2y+8$.

   b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=xh(x)$ est solution de (E).
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(2;0)$? Si oui, la préciser.

Exercice 5 :

1. Résoudre l'équation différentielle
$$2y'+y=0 \quad (E)$$
dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :
$$2y'+y=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)(x+1) \quad (E')$$

   a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)(mx^2+px)$$
soit solution de (E').

   b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g-f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E').

Exercice 6 :

Partie A : On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!} \exp(-x)$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour toutx réel $g(x) = h(x)\exp(-x)$.

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si pour tout x réel

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit ϕ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation $(F) \quad y' + y = 0$.

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale ϕ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B : On pose pour tout x réel, $f_0(x) = \exp(-x)$, et $f_1(x) = x\exp(-x)$.

1. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

2. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la partie A, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\exp(-x)$.

Exercice 7 :

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) = 1 & \text{pour tout nombre réel } x \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. Démontrer que la fonction f ne s'annule par sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Question de cours :

a. On sait que la fonction $x \mapsto \exp\left(\dfrac{x}{16}\right)$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto K\exp\left(\dfrac{x}{16}\right)$, où K est un nombre réel quelconque.

b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

c. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant (C) et préciser quelle est cette fonction.

Exercice 8 :

Résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' + 2y = 6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 9 :

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.

f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10$$

La température est exprimée en derés Celsius et le teps t en heures.

Déterminer $f(t)$ pour $t \geq 0$ sachant que pour $t = 0$, la températue de l'objet est 220° C.