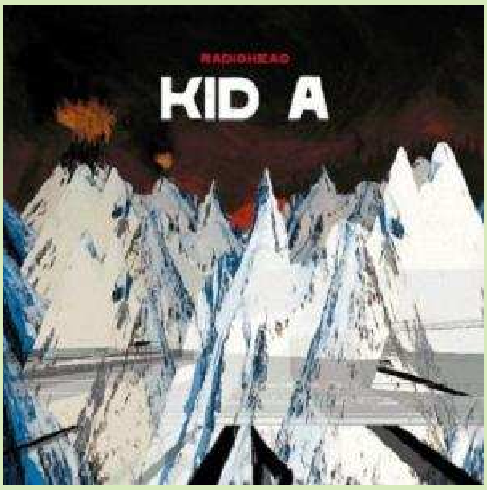
CHAPITRE 2

RÉCURRENCE ET SUITES

HORS SUJET



TITRE : « Kid A »

AUTEUR : RADIOHEAD

PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Kid A est le quatrième album du groupe de rock britannique Radiohead, il est sorti en 2000. Alors que les albums précédents (tel OK Computer) restent dans un style rock alternatif, les albums suivants sont beaucoup plus psychédéliques : Kid A marque l'apogée de ce style expérimental de Radiohead. Pour cette raison, il est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre. Dans cet album, les guitares ont quasiment disparu au profit de synthétiseurs et de sampleurs. Le nom donné à l'album, Kid A (littéralement « Enfant A »), évoque pour certains un premier enfant cloné. Pour d'autres, il laisse penser que le groupe le considère comme son premier enfant. Avec Kid A, l'album suivant de Radiohead, Amnesiac, forme un diptyque de musique expérimentale, un prolongement : Kid A et Amnesiac forment en réalité le diptyque Kid Amnesiac. Ce disque comporte une majorité de chansons composée principalement de synthétiseurs et de boîtes à rythmes (Kid A, Idioteque, Everything in Its Right Place...), tout en gardant des sonorités pop/rock (In Limbo) et en explorant d'autres univers comme le free-jazz (The National Anthem). Selon Thom Yorke et Jonny Greenwood cet album est inspiré en partie par le livre No Logo de la journaliste canadienne Naomi Klein. Les membres du groupe pensaient d'ailleurs au départ à appeler l'album No Logo, en hommage à ce livre qui décrit la société de consommation.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *I wish I was special* »
RADIOHEAD (EXTRAIT DE CREEP)

LEÇON 2

Récurrence et suites

Résumé

Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des *fonctions numériques* (celles définies sur $I \subset \mathbb{N}$), les suites méritent une étude à part entière car elles jouent un rôle extrêmement important à la fois en mathématiques et en physique. Elles permettent en effet dans les deux cas de fournir une approximation du « réel ». Après avoir mis en place un raisonnement important et fait quelques rappels de première, nous approfondirons la notion de limite de suite, puis nous parlerons d'applications importantes, en particulier les suites adjacentes.

Dans tout le chapitre, n et n_0 désignent des entiers naturels.

I) Démonstration par récurrence

I-1 Exemple introductif

Travail de l'élève **1.**

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)} \end{cases}$

Chaque terme de cette suite se calcule à partir du précédent. On dit que cette suite est définie ....
But : *On souhaiterait obtenir une formule .... de u_n en fonction de n, afin de pouvoir calculer n'importe quel terme rapidement (sans devoir calculer chacun des précédents).*

1. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
2. Calculant les premiers termes de la suite jusqu'à u_5 sous forme de fraction irréductible.
3. Que vous attendez-vous à trouver pour u_6 ? Calculer u_6.
4. Conjecturer une valeur pour u_{101} ? Ce résultat est-il certain ?
5. Quelqu'un a eu le courage de calculer u_7, u_8, ..., jusqu'à u_100 et a trouvé $u_{100} = \dfrac{100}{101}$.
   Calculer u_{101}.

   Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété ***supposée*** *résultant d'un certain nombre d'observations.*
   Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

6. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = ...$ »
   Supposons un instant, que pour un certain entier k, on a calculé u_k et on a effectivement trouvé $u_k = ...,$

a. Quelle sera l'expression du terme suivant u_{k+1} ?

b. La propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est-elle vraie elle aussi ?
Autrement dit ....
On dit que la propriété $\mathscr{P}$ est ....

7. Connaissant u_6, quel terme en déduisez-vous grâce à la question 6. ?
Puis quel autre terme ?

8. Au final on a vu que la propriété $\mathscr{P}$ était vraie au rang $n =$ ......, ..., ..., ..., ..., ..., ... et .... On dit que la propriété est ....
Mais comme la propriété $\mathscr{P}$ est .... elle sera vraie au rang ......, puis au rang ......, puis au rang ......, etc.
Quel conclusion pouvez-vous en tirer ?

Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence**.

I-2 Principe et exemples

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $\mathscr{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$). Si :
– La propriété est initialisée à un certain rang n_0 (i.e si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie)
– La propriété est héréditaire à partir du rang n_0 (i.e si pour $n \geq n_0$ $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$)

Alors :
La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Démontrer que $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution **:**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ ».
– **Initialisation** : $u_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 1$
Par conséquent $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
– **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 1$, ie que $u_n = 2^n - 1$.
Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, i.e montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.
On a $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1$ d'après notre hypothèse.
Donc $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
– **Conclusion** : On a montré par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $u_n = 2^n - 1$.

Exemple :

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'_n(x) = nx^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On rappelle que $(x^2)' = 2x$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Solution :

Notons $\mathscr{P}(n)$: f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

- **Initialisation** : $f_2(x) = x^2$ et on sait que : $f_2'(x) = 2x$ (démontré en 1ère).
  Par conséquent $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 0$.
  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, i.e montrons que f_{n+1} est une fonction dérivable et que $f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$.
  On a $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n(x) \times f_1(x)$. Or le produit de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, par conséquent f_{n+1} est dérivable.
  De plus, sa dérivée vaut :
  $$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)f_1(x) + f_n(x)f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^{n-1}x = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$
  Donc la propriété est héréditaire.
- **Conclusion** : On a montré par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Exercices du livre :

n° 45-46-48-49-52-54 p 40

II) Généralités

II-1 Présentation des suites : rappels

Définition 1 :

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0. On la note u, (u_n) ou encore $(u_n)_{n \geq n_0}$.

L'image de l'entier n par u se note u_n et est appelé **terme d'indice n de la suite u**.

Exemples :

La suite $(u_n)_{n \leq 12}$ définie par $u_n = \sqrt{n - 11.4}$. On dit qu'elle est définie *explicitement* (en fonction de n)

La suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

On dit qu'elle est définie *par récurrence* (un ou des termes initaux et relation entre termes).

Remarques :

- En fait $u_n = u(n)$
- On représente en général une suite dans le plan en plaçant les points de coordonées $(n; u_n)$.
- Il est équivalent de dire $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_n = 2u_{n-1} + 3$.

II-2 Sens de variation d'une suite : rappels

Définition 2 :
Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit qu'à partir du rang n_0, la suite (u_n) est :
- **croissante** si $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n+1}$,
- **décroissante** si $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n+1}$,
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0
- **stationnaire** si $\forall n \geq n_0$, on a $u_n = u_{n+1}$ (si la suite est définie à partir du rang n_0 alors on dit que la suite est **constante**)

Remarque : On définit de même la stricte monotonie, mais à l'aide d'inégalités strictes.

Exemple :
La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ est strictement croissante, puisqu'on ajoute à chaque terme précédent un nombre positif.

Remarque : Le nombre $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ est une somme de termes tous de la forme k^2.
On l'écrira sous la forme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.
Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2$ désigne la somme de tous les termes k^2 obtenus en remplaçant k par 1, par 2, par 3 et par 4.

Exemples :
La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2}$ est strictement décroissante.
La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = -1$ et $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2}$ est strictement croissante.

Contre-Exemple :
La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_0 = 1$ et $u_n = -\dfrac{u_{n-1}}{2}$ n'est pas monotone !

Travail de l'élève **2.** (5 p 13) Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

1. Représenter la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ sur trois graphiques.
2. Représenter sur chacun des graphiques les premiers termes de trois suites u, v et w définies par :
   - Pour $n \geq 0$, $u_n = \sqrt{n+2}$.
   - $v_0 = 6$ et pour $n \geq 0$, $v_{n+1} = f(v_n) = \sqrt{v_n + 2}$
   - $w_0 = -1$ et pour $n \geq 0$, $w_{n+1} = f(w_n) = \sqrt{w_n + 2}$
3. Que penser des affirmations suivantes :
   - « Si f est croissante, une suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ est une suite croissante » ?
   - « Si f est croissante, une suite (u_n) telle que $u_n = f(u_n)$ est une suite croissante » ?

Théorème 1 :
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$, avec f définie sur l' intervalle $[n_0; +\infty[$.
Si la fonction f est (strictement) monotone sur $[n_0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est (strictement) monotone et possède le même sens de variation que la fonction f.

Preuve

1. Cas 1 : Si f est strictement croissante sur $[a;+\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement croissante sur $[a;+\infty[$,
   $$f(n) < f(n+1) \Longleftrightarrow u_n < u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.
2. Cas 2 : Si f est strictement décroissante sur $[a;+\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement décroissante sur $[a;+\infty[$,
   $$f(n) > f(n+1) \Longleftrightarrow u_n > u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Contre-Exemple :
La réciproque de ce théorème est fausse i.e que l'on peut trouver une suite croissante, définie par une fonction non croissante, comme le montre l'exemple où $f(x) = x + \sin(\pi x)$ et $u_n = f(n) = n$.
Les tracer sur la calculatrice.

Contre-Exemple :
Soit $u(_n)$ une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. La monotonie de f n'entraîne pas celle de u, comme le montre l'exemple où $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
Les tracer sur papier, en choisissant deux valeurs possibles pour u_0.

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$ pour $n \geq 1$

Notons f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $$f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$$

On a en dérivant : $$f'(x) = \frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}$$

Or, pour $x \geq 1$, $\dfrac{\pi}{x} \in]0;\pi]$ donc $\sin\dfrac{\pi}{x} \geq 0 \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0$, donc la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$, par conséquent la suite (u_n) est croissante.

Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n.
- Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, lorsque $u_n > 0$ pour tout n.
- Montrer par récurrence que pour tout n on a $u_{n+1} \leq u_n$ ou $u_{n+1} \geq u_n$.
- Utiliser le théorème précédent.

Exemple :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2+2$, alors on a

$$u_{n+1} = (n+1)^2+2 = n^2+2n+3$$

Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 2n+1$

On voit que $u_{n+1} - u_n > 0$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$

Exemple :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2\times 5^n$, on a $u_n > 0$ pour tout entier naturel n et

$$u_{n+1} = 2\times 5^{n+1}$$

Ainsi pour tout n on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5$$

On voit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_{n+1} < u_n$

- **Initialisation** : $u_0 = 16$ et $u_1 = 4$, par conséquent $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie
  On a donc :

$$\begin{array}{rll} & 0 \leq u_{n+1} < u_n & \text{puisque } \mathscr{P}(n) \text{ est vraie} \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n} & \text{puisque } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \Longleftrightarrow & 0 \leq u_{n+2} < u_{n+1} & \\ \Longleftrightarrow & \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie} & \end{array}$$

  On vient de démontrer par récurrence que $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercices du livre :

n° 31-32 p 38 + 43 p 39

II-3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 3 :

On considère une suite (u_n).

- On dit que (u_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- On dit que (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n > m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- On dit que (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée i.e s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < u_n < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarques :

- (u_n) est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $| u_n |< M$.
  En effet si $| u_n |< M$ alors on a : $-M < u_n < M$ et (u_n) est bornée.
  Réciproquement si (u_n) est bornée alors il existe deux réels a et b tels que $a < u_n < b$.
  Choisissons $M = max(| a |;| b |)$, dans ce cas on a $-M \leq a$ et $b \leq M$, et donc : $| u_n |< M$
- Si M est un majorant de (u_n), alors tout nombre supérieur à M l'est aussi.

Pour montrer qu'une suite est bornée, on peut :

- Raisonner sur des inégalités équivalentes
- Etudier la fonction associée
- Faire une récurrence

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$. Montrons que (u_n) est bornée.

$$\begin{array}{ll} & -1-1 \leq (-1)^n + \sin n \leq 1+1 \qquad \text{en effet } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin n \leq 1 \\ \iff & -2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq 1 \\ \iff & -2 \leq u_n \leq 2 \end{array}$$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases}$

Montrer, par récurrence, que cette suite est bornée.

Solution **:**

Il est clair que (u_n) est minorée par 0. Mais par quoi est-elle majorée ? ?

Le calcul des premiers termes, donne ici une indication : $u_1 \simeq 2,45 \qquad u_2 \simeq 2,91 \qquad u_3 \simeq 2,98$.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 3$ »**Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie de manière évidente puisque $u_0 = 0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang n tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

Dans ce cas on a : $0 \leq u_n \leq 3$

Par conséquent : $6 \leq 6 + u_n \leq 9$

Et par passage à la racine : $\sqrt{6} \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3$

Au final : $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$

Conclusion : $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_{n+1} \leq 3$, d'où (u_n) est bornée.

Exercices du livre :

n° 34 p 38

III) Comportement asymptotique d'une suite : rappels

III-1 Notion de convergence et divergence

Définition 4 :

On dit qu'une suite **admet une limite** ℓ (ou **converge vers** ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

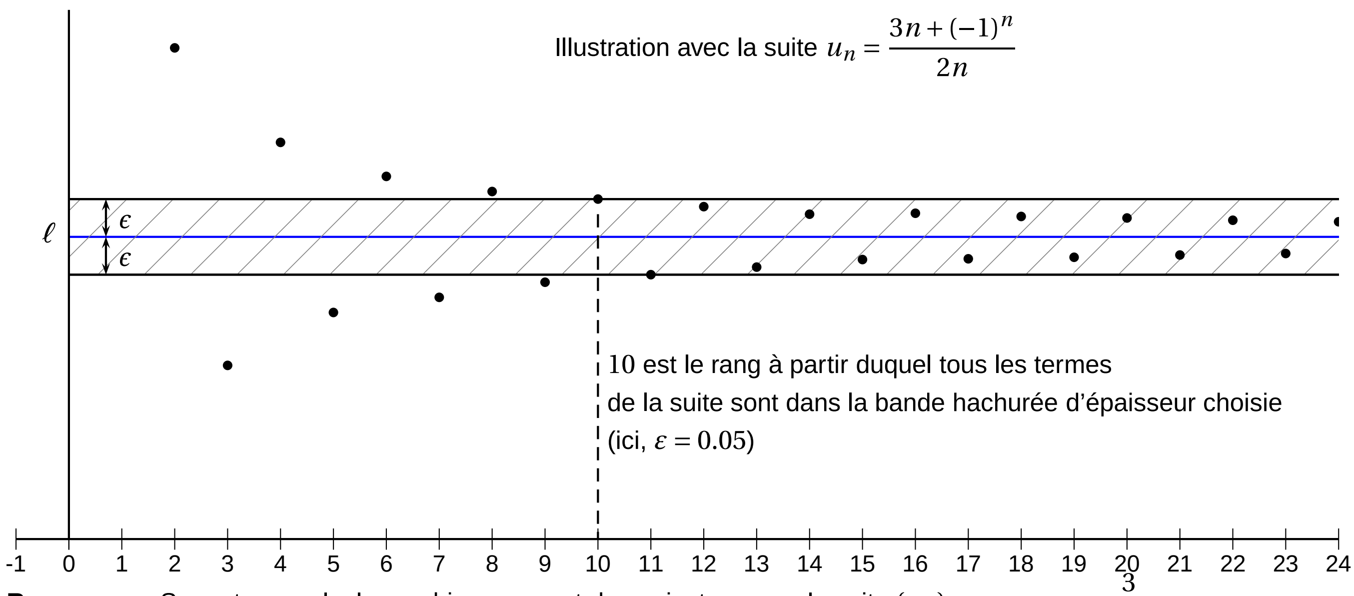
Remarque : On utilise en général un intervalle centré en ℓ.

Exemples :

La suite $\left(\dfrac{1}{n}-2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2.
La suite $\left(\dfrac{3n^2-4}{-2n^2+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite $-\dfrac{3}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=(-1)^n$ est divergente car elle n'admet pas de limite.

Remarques :

- Une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite
- Graphiquement, la notion de limite se traduit ainsi :
  Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang (ou un indice) à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.
- De manière plus formelle : $\forall \varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout indice $n \geq N$, on a $|\, u_n - l \,| \leq \varepsilon$



Remarque : Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{3}{2}$

Théorème 2 :

Si une suite (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 telles que $\ell_1 < \ell_2$.
Notons $d = \ell_2 - \ell_1$ Par définition, l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{d}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, de même l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\frac{d}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Par conséquent $I_1 \cap I_2$ est un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Or, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, ce qui est absurde. Par conséquent la suite (u_n) ne peut admettre qu'une limite.

Définition 5 :

On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (dépendant du A considéré). On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On définit de même la divergence vers $-\infty$ à l'aide d'intervalle du type $]-\infty;A[$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples :

Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n^3 - n^2 + n - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes vers $+\infty$.

Remarque : Dire que (u_n) tend vers $+\infty$ revient à dire que :

– Tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.
– Le terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.
– Quelque soit le nombre choisi A, il existe un rang à partir duquel tous les termes sont supérieurs à A.
– Formellement : $\forall A$, il existe un rang N tel que pour tout indice $n \geq N$ on a $u_n \geq A$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Solution **:**

Soit $A \in \mathbb{N}$. Comme la suite (u_n) est croissante, on veut montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. En effet, dans ce cas l'intervalle ouvert $]A;+\infty[$ contiendra tous les termes de la suite à partir de n_0.
Notons $\mathscr{P}(A)$ la propriété suivante : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$

– **Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie, en effet $u_1 > 0$
– **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(A)$ soit vraie, montrons que $\mathscr{P}(A+1)$ est vraie, ie qu'il existe n_1 à partir duquel tout les termes de la suite sont supérieur à $A+1$. On remarque que

$$u_{2n} = u_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq u_n + n \times \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2}$$

Puisque $\mathscr{P}(A)$ est vraie, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$, par conséquent :

$$u_{4n_0} \geq u_{2n_0} + \frac{1}{2} \geq u_{n_0} + 1 > A + 1$$

Donc à partir de $n_1 = 4n_0$, tous les termes de la suite sont supérieurs à $A+1$. Ainsi $\mathscr{P}(A+1)$ est vraie.

On vient de démontrer, par récurrence, que (u_n) est une suite qui diverge vers $+\infty$

Exemples : Limites de référence

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Preuve Hors Programme

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Soit A un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$.
On remarque que $u_n > A \iff \sqrt{n} > A \iff n > A^2$.
Si on choisit $n_0 = A^2+1$ alors $u_{n_0} = \sqrt{A^2+1} > A$.
Comme de plus la suite est croissante (car de la forme $u_n = f(n)$ avec f croissante), tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$ à partir de n_0. Donc ce n_0 convient.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
Soit A un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$.
d'un certain rang n_0.
On remarque que $u_n > A \iff n^2 > A \iff \sqrt{n} > A$.
Si on choisit n_0 le premier entier supérieur strictement à $\sqrt{A}$ alors $u_{n_0} = (n_0)^2 > A$.
Comme de plus la suite est croissante (car de la forme $u_n = f(n)$ avec f croissante), tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$ à partir de n_0. Donc ce n_0 convient.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
Soit ϵ un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $I =]-\epsilon;+\epsilon[$.
On remarque que $\frac{1}{n} > 0$ pour tout entier n, on cherche donc à déterminer à partir de quel entier n_0 on a : $0 < u_n < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$
Si on choisit n_0 le premier entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$ alors $u_{n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Comme de plus la suite est décroissante (car de la forme $u_n = f(n)$ avec f décroissante), tous les termes de la suite appartiennent à I à partir de n_0. Donc ce n_0 convient.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ Soit ϵ un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $I =]-\epsilon;+\epsilon[$.
On remarque que $\frac{1}{n} > 0$ pour tout entier n, on cherche donc à déterminer à partir de quel entier n_0 on a : $0 < u_n < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n^2 \iff 0 < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$
Si on choisit n_0 le premier entier supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ alors $u_{n_0} = \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$.
Comme de plus la suite est décroissante (car de la forme $u_n = f(n)$ avec f décroissante), tous les termes de la suite appartiennent à I à partir de n_0. Donc ce n_0 convient.

Remarque : Si (u_n) admet une limite, alors toute sous-suite de (u_n) admet la même limite.
On utilisera en général ce résultat

- Pour les suites récurrentes, afin de déterminer la limite, solution de l'équation $\ell = f(\ell)$
- Pour sa contraposée, en montrant que deux sous-suites de (u_n) n'ont pas la même limite, donc que (u_n) n'admet pas de limite.

La réciproque est fausse.

III-2 Règles opératoires et propriétés

III-2.1 Opérations sur les limites

Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

Cas d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$

lim b_n / lim a_n	$b\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a\in\mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Cas d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)$

lim b_n / lim a_n	$b\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a\neq 0$	$a\times b$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $a=0$ et si $b\in\mathbb{R}$ alors le produit a_nb_n tend vers 0.

Cas d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$

lim b_n / lim a_n	$b\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a\neq 0$	$\dfrac{b}{a}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

Si $a=0$ et si $b\neq 0$ alors le quotient $\dfrac{b_n}{a_n}$ tend vers $\pm\infty$.

Remarque : Il faut être conscient que tous les résultats de ces tableaux se démontrent (et certains ne sont pas évidents), nous ne présenterons ici aucune démonstration et nous admettrons tous ces résultats.

III-2.2 Les formes indéterminées

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

« $0\times\infty$ » « $\dfrac{0}{0}$ » « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » « $\infty-\infty$ »

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

III-2.3 Suites explicites

Définition 6 :

Soit une fonction f définie sur un intervalle $]a;+\infty[$, $(a\in\mathbb{R})$.

– f tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
– f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle $]\lambda;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
– f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty;\lambda[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Remarque : Des définitions analogues existent pour f définie sur $]-\infty;a[$ et quand $x\to-\infty$ (avec $-x$ assez grand).

Théorème 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I du type $[a;+\infty[$ où $a\in\mathbb{R}^+$ et (u_n) une suite définie par $u_n=f(n)$.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Remarques :

– Notons que la réciproque du résultat précédent est fausse, par exemple la suite $u_n=\cos(2\pi n)$ est constante et égale à 1 donc admet bien une limite tandis que la fonction $x\longmapsto\cos(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
– Grâce à ce théorème, on récupère toutes les règles de calculs sur les limites (consulter les fiches de premières en annexes).
– Rappelons les deux résultats importants :
  * La limite en l'infini d'une expression polynômiale est la limite du terme de plus haut degré.
  * La limite en l'infini d'une expression rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exercices du livre :

n° 1-3-11 p 73

III-3 Théorèmes de comparaison

Théorème 4 : *Théorème de comparaison*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leq v_n$

– Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi.
– Si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) aussi.

Preuve

Considérons A un réel. Supposons que (u_n) diverge vers $+\infty$: dans ce cas, à partir d'un certain rang N tous les termes de la suite (u_n) vérifient : $u_n>A$, par conséquent on aussi à partir du rang N, $v_n>A$, ce qui prouve que (v_n) diverge vers $+\infty$.
La deuxième démonstration est analogue.

Exemples : Comportement asymptotique des suites géométriques

1. Si $q > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. Si $q = 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
3. Si $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
4. Si $q < -1$, on a (q^n) n'admet pas de limite.

Solution :

On commence par démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } (1+x)^n \geq 1+nx$$

- Si $q \in]1;+\infty[$ alors $q = q'+1$ avec $q' > 0$ et on a $q^n = (1+q')^n \geq 1+nq'$.
  Or $(1+nq')$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 (donc convergente vers 1) .
- Si $q \in]-1;1[$. On pose $q' = \dfrac{1}{|q|}$. Alors $q' > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} (q')^n = +\infty$.
  Donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = \pm \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(q')^n} = 0$.
- Si $q \in]-\infty;-1]$, alors (q^{2n}) tend vers $+\infty$ tandis que (q^{2n+1}) tend vers $-\infty$.
  Donc (q^n) n'a pas de limite.

Exercices du livre :

n° 7-8 p 73 + 27-28 p 75

Théorème 5 : *Théorème des gendarmes*

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

1. à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Preuve

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ Notons n_0 le rang à partir duquel on a $u_n \leq v_n \leq w_n$
n_1 le rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont contenus dans I et n_2 le rang à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont contenus dans I.
Notons $N = max(n_0;n_1;n_2)$, alors on a :

- à partir du rang N, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- D'après le point précédent, tous les termes de la suite v_n sont contenus dans I à partir du rang N, ce qui prouve que la suite (v_n) converge vers ℓ

Remarque : Précisons que tous les théorèmes de comparaison vus dans cette partie, ainsi que les opérations sur les limites sont valables pour les fonctions.

Exercices du livre :

n° 4 p 73

IV) Bornes, sens de variation et limites

IV-1 Premiers résultats

Théorème 6 :

Si (u_n) est une suite de nombres réels positifs à partir d'un certain rang et de limite ℓ, alors $\ell \geq 0$.

Preuve

Soit n_0 l'indice à partir duquel tous les termes de la suite sont positifs.

Supposons $\ell < 0$ et considérons l'intervalle $I = \left]\frac{3\ell}{2}; \frac{\ell}{2}\right[$.

I est un intervalle ouvert contenant ℓ. Donc il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite sont contenus dans I.

Soit $N = max(n_0; n_1)$. Tous les termes de la suites d'indice supérieur à N sont dans I et sont positifs. Mais I ne contient que des négatifs. Ceci est donc absurde et $\ell \geq 0$.

Corollaire 1 :

1. Si (u_n) est une suite de nombres réels négatifs à partir d'un certain rang et de limite ℓ, alors $\ell \geq 0$
2. Soit (u_n) une suite de limite ℓ et majorée par un réel M à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq M$.
3. Soit (u_n) une suite de limite ℓ et minorée par un réel m à partir d'un certain rang, alors $m \leq \ell$.
4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout entier n : $u_n < v_n$ (resp $u_n \leq v_n$) alors dans ces deux cas on a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Preuve

1. Similaire à la preuve précédente en supposant $\ell > 0$ et en considérant l'intervalle $\left]\frac{\ell}{2}; \frac{3\ell}{2}\right[$.
2. La suite $(M - u_n)$ est positive à partir d'un certain rang, donc sa limite $M - \ell$ est positive. D'où $M \geq \ell$
3. La suite $(u_n - m)$ est positive à partir d'un certain rang, donc sa limite $\ell - m$ est positive. D'où $m \leq \ell$
4. La suite $(v_n - u_n)$ est positive et donc sa limite $\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n$ est positive.
D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$

Théorème 7 :

Si (u_n) est une suite convergente alors (u_n) est bornée.

Preuve

Notons ℓ la limite de la suite (u_n), alors tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]\ell - 1; \ell + 1[$ à partir d'un certain rang N. On a alors pour tout $n \geq N$:

$$\ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

Notons $m = min(u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{N-1}; \ell - 1)$ et $M = max(u_0; u_1; u_2; \ldots; u_{N-1}; \ell - 1)$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leq u_n \leq M$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

Théorème 8 : ***Admis***

Toute suite croissante et majorée de réels converge.

Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Remarque : Ce théorème permet de démontrer la convergence de certaines suites sans avoir à déterminer leur limite.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$. Cette suites est décroissante minorée par 1, donc elle converge.

Exercices du livre :

n° 40-46-43-44 p 76 + Vrai-faux p 74

Théorème 9 :

Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Toute suite décroissante non minorée diverge vers $+\infty$.

Preuve

Soit (u_n) une suite croissante non majorée ; et un intervalle $I =]A; +\infty$ $(A \in \mathbb{R})$. La suite u n'étant pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq A$.

La suite u étant croissante, tous les termes après le rang n_0 sont supérieurs à A, donc contenus dans I.

Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

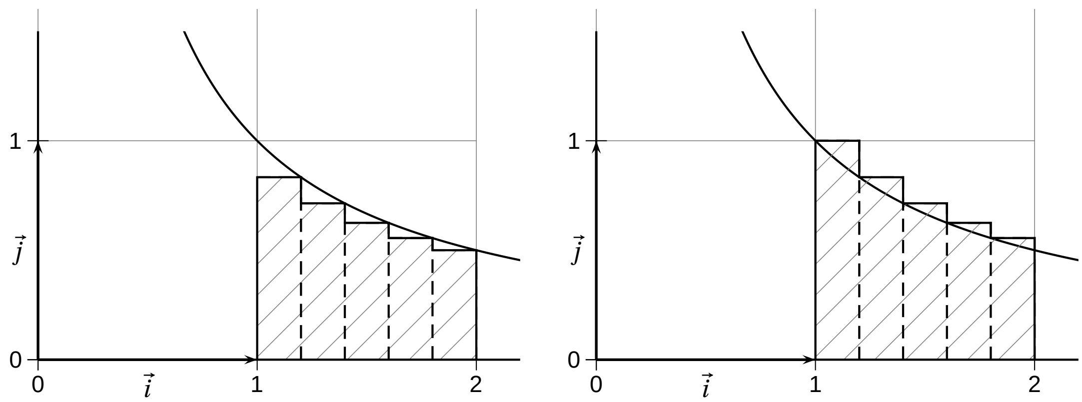
La deuxième partie découle de la première, en considérant la suite $(-u_n)$, croissante non majorée.

Remarque : Notons que tous les résultats sur les suites de cette partie sont également vrais pour des fonctions.

IV-2 Suites adjacentes

Travail de l'élève **3.**

1. On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction inverse : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [1;2]$.
   On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
   a. On découpe l'intervalle $[1;2]$ en 5 intervalles de même amplitude.
      i. Donner les valeurs x_0, x_1, ..., x_5 des bornes des intervalles.
      ii. Déterminer les images de ces valeurs par f.
      iii. En considérant les aires des 5 rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe $\mathscr{C}$, déduire, l'expression de l'aire hachurée sur chacun des dessins ci-dessous.



b. On découpe désormais l'intervalle $[1;2]$ en n intervalles de même amplitude.

i. Donner les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ des bornes des intervalles.

ii. Déterminer $f(x_k)$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

iii. Calculer en fonction de n la somme des aires des n rectangles côte à côte de même largeur, situés « sous » la courbe $\mathscr{C}$ et dont l'un des sommets est sur la courbe $\mathscr{C}$ (sur le même principe que ci-dessus).
Même question pour les rectangles situés « au-dessus » de la courbe $\mathscr{C}$.

2. On considère désormais les suites (u_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

a. Déterminer les quatre premiers termes des suites (u_n) et (v_n) à 10^{-2} près.

b. Représenter les points correspondants sur un axe gradué.

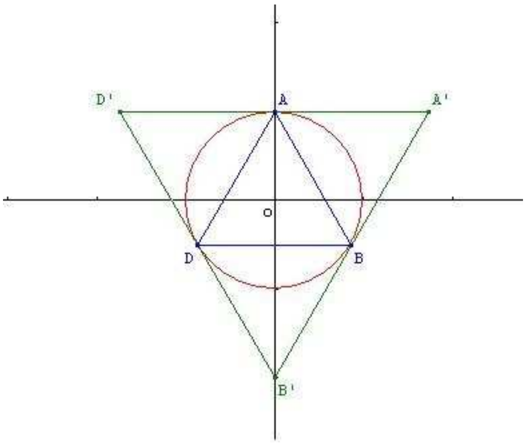
c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante.

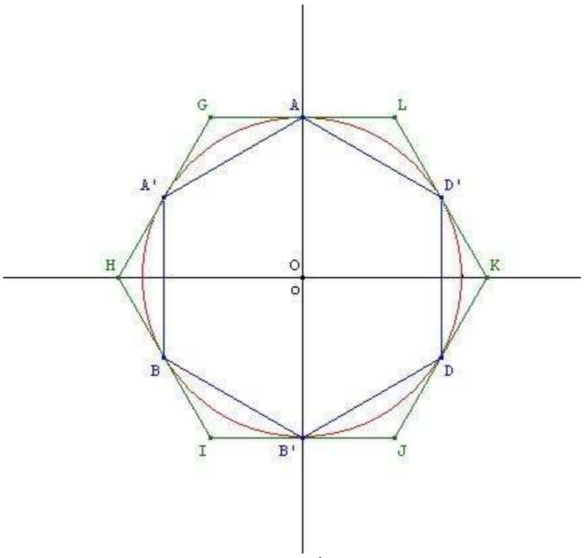
d. Calculer $v_n - u_n$ et démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

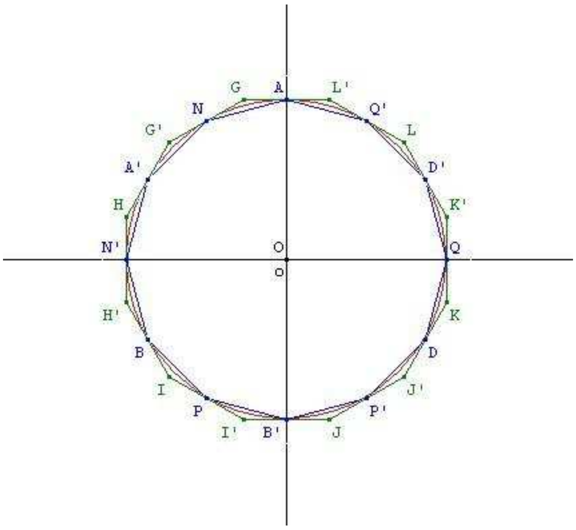
e. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) ?

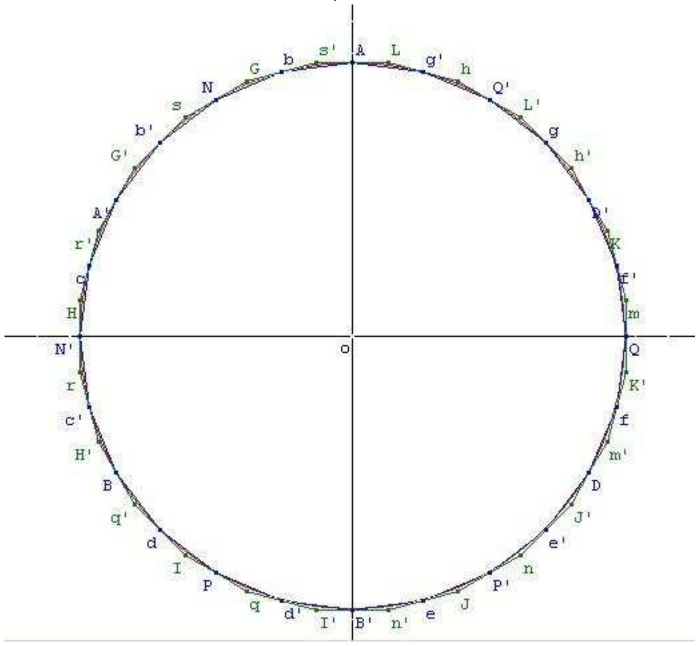
f. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50}.

Remarque : Sur le même principe, Archimède (III^e avant JC) décida d'encadrer l'aire d'un cercle de rayon 1 par celle d'un polygône régulier inscrit dans ce cercle et par celle d'un polygône régulier exinscrit.
En augmentant le nombre de côtés des polygônes, les aires (croissantes pour les inscrits, décroissantes sinon) se rapprochent tous de l'aire du cercle, à savoir π.
Voici les illustrations pour les triangles (3 côtés), les hexagones (6 côtés), les dodécagones (12 côtés) et les icosikaitétragones ou tétraicosagones (24 côtés)









Il démarre cette approximation avec un polygone à 3 côtés, et termine avec un polygone ayant 96 côtés.
Au fur et à mesure de son calcul, il encadre de plus en plus π, pour arriver à $3.14084507 < \pi < 3,14285714$

Définition 7 :
Soient deux suites (u_n) et (v_n). Lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

On dit ques les suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes*.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

et la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$
Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Théorème 10 :
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$

Preuve

On considère deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Montrons tout d'abord que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $w_n = v_n - u_n$, on a :

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

Comme (v_n) est décroissante $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
Comme (u_n) est croissante $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Par conséquent $w_{n+1} - w_n \leq 0$ pour tout n et (w_n) est une suite décroissante.
On a donc pour tout $m > n$, $w_m \leq w_n \Longleftrightarrow v_m - u_m \leq v_n - u_n$.
Par passage à la limite dans cette inégalité lorsque $m \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$0 \leq v_n - u_n \Longleftrightarrow u_n \leq v_n$$

On a finalement :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Donc (u_n) est une suite croissante majorée par v_0, on sait alors qu'elle converge vers un certain réel l.
De même (v_n) est une suite décroissante minorée par u_0, donc elle converge vers un certain réel l'.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = l' - l$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$. Par unicité de la limite on obtient : $l = l'$

Exemple :

En considérant les deux suites de l'exercice précédent, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de leur limite commune l [a]

a. On cherche à partir de quel entier n on a $v_n - u_n \leq 10^{-3}$

Exercices du livre :

n° 47-48 p 77