EXERCICES : ANNALES COMPLEXES 1/2

Exercice 1 :

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F.
Calculer l'affixe de K'.

b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$. En déduire que : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

Exercice 2 :

(5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe −2i et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i})$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application f.

3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z' + 2\mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1$.

b. En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$:

$$\mathrm{BM}' \times \mathrm{AM} = 1$$
et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. **a.** Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E′ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle BD′ E′ ?

Exercice 3 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1-2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $-2+2\mathrm{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.
On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{3+9\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}}$.
écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_{\mathrm{E}} + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_{\mathrm{E}} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_{\mathrm{K}} = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4\text{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; −1), (D ; + 1), (B ; + 1).

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\text{i}$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

Exercice 5 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3}+\mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3}+\mathrm{i}.$$

1. **a.** Ecrire z_{A}, z_{B} et z_{C} sous forme exponentielle.

   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. **a.** Ecrire le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

   b. En déduire la nature du triangle ABC .

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

   a. Montrer que le point O$'$, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

   b. Démontrer que les points C et O$'$ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

   $$|z| = \left|z+\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

Exercice 6 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.
Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1+\text{i}\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1. **a.** Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2. Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

a. Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

b. Justifier que le point E a pour affixe $z_{\text{E}} = \alpha\text{e}^{\text{i}\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a. Justifier que le point F a pour affixe $z_{\text{F}} = \dfrac{\alpha}{2} + \text{e}^{\text{i}\theta}$.

b. On admet que le point G a pour affixe $z_{\text{G}} = \dfrac{\alpha\text{e}^{\text{i}\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\dfrac{z_{\text{G}} - 2}{z_{\text{F}} - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a.
En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

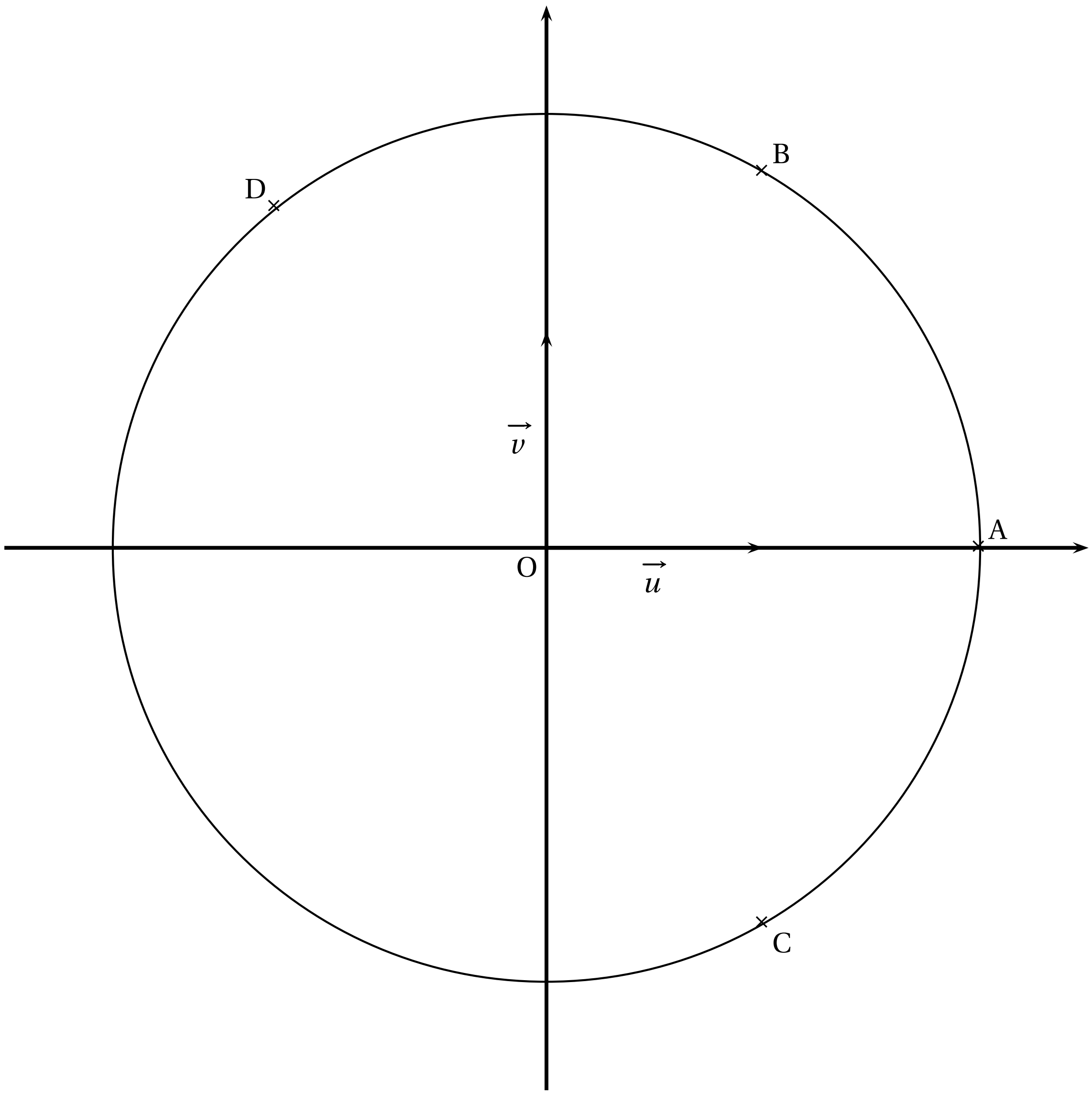
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.
On admet que $\text{AF}^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.
Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$. Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

ANNEXE 2 (Exercice 4)

(**à rendre avec la copie**)



Exercice 7 :

(5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ (unité graphique :2 cm).
On considrèe les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = -3.$$

Partie A

1. Ecrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.
On note O', A', B' et C' les points respectivement associs par f aux points O, A, B et C.

1. **a.** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.

   b. Placer les points A′, B′ et C′ .

   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′.

   d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G′ le point associé à G par f. Déterminer les affixes des points G et G′. Le point G′ est-il l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′ ?
2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

Exercice 8 :

(5 points)

Le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, unité graphique : 2 cm.
On appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M diffrent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + \mathrm{i} - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.

a. Calculer a' et b'.

b. Placer les points A, A', B et B'.

c. Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

d. En déduire la nature du triangle OBB'.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2 + \mathrm{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

b. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

c. Démontrer que les points de (E) appartiennent (Γ).

3. Soit θ un réel.

a. Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.

b. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.