EXERCICES : COMPLEXES/1

Exercice 1. Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)$
2. $z_3 = \left(\frac{1}{2}-4i\right)^2$
3. $z_4 = (5-2i)(5+2i)$
4. $z_5 = (1+i)(5-8i)(1-i)$
5. $z_6 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$
6. $z_7 = -\frac{1}{i}$
7. $z_8 = \frac{8i-1}{2-3i}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5z+2i = (1+i)z-3$
2. $i(3-i)z-2 = (2i+1)z+(2i+z)i$
3. $\frac{z-i}{z+1} = 4i$

Exercice 3. La plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $2-i$; $2i$ et $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. Déterminer les affixes des points A' et B' symétriques de A et B par rapport à O
3. Lire l'affixe du symétrique C' de C par rapport à l'axe réel, puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice 4. A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B.

1. Soit I le point vérifiant $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
   Préciser la position de I et calculer son affixe.
2. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre des points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 3+i \qquad z_B = -2i \qquad z_C = 4-3i \qquad z_D = 5$$

Exercice 5. On considère le parallélogramme $ABCD$ avec A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -1-5i \qquad z_B = 4-3i \qquad z_C = 3+3i \qquad z_D = -2+i$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point C', symétrique de C par rapport au point D
   b. Déterminer l'affixe du point A' vérifiant : $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$
2. Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

Exercice 6. Grâce aux propriétés du conjugué, écrire le conjugué du complexe donné sous forme algébrique :

1. $z_1 = (2-3i)(-1+i)$
2. $z_2 = \frac{i(2-i)}{i-3}$

Exercice 7. Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(z')$ appartient à l'axe réel.

1. $z' = z^2 - 2\overline{z} + 1$

2. $z' = \dfrac{iz}{2-z}$

Exercice 8. Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(z')$ appartient à l'axe imaginaire.

1. $z' = (z-1)(\overline{z} - i)$

2. $z' = \dfrac{iz}{2-z}$

Exercice 9. Soit $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a;b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a + b + i(b-1)$ soit :

1. un réel **2.** un imaginaire pur **3.** nul

Exercice 10. Pour tout complexe z différent de i, on définit $Z = \dfrac{z+1}{z-i}$

1. On pose $z = x + iy$ et $Z = a + ib$ avec x, y, a et b réels.
Exprimer a et b en fonction de x et y

2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble (E) des points d'affixe z tels que Z soit réel.

Exercice 11.

1. Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z' = -1 + 2i$.

Exercice 12. Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow |z - 2 - i| = 1$

2. $M \in \mathscr{F} \Longleftrightarrow |z| = |\overline{z} - 2 + i|$

3. $M \in \mathscr{H} \Longleftrightarrow |z-3| = |z-3i|$

4. $M \in \mathscr{K} \Longleftrightarrow |\overline{z} - 4 + i| = 1$

5. $M \in \mathscr{L} \Longleftrightarrow arg(\overline{z}) = arg(-z)[2\pi]$

Exercice 13. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sqrt{3} + i \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_1^2$$

Exercice 14. Dans le plan complexe, on considère un point Ω d'affixe ω, $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r et un point M d'affixe z.

1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \Longleftrightarrow z = \omega + re^{i\theta} \qquad \text{avec } \theta \in [0;2\pi[$$

2. Que représente l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $z = 2i + 3e^{i\theta}$

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $-2z^2+6z-5=0$
2. $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$
3. $(t^2-5)(t^2+6t+14)=0$
4. $(t^2+3)(2t^2+2t-4)=0$
5. $(4z^2-4z+101)(z^2+1)=0$
6. $x^3+6x^2+13x=0$
7. $2z^4-5z^2-18=0$
8. $z^3-12z+48z-128=0$ [1]

Exercice 16.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $z^3-1=(z-1)(z^2+az+b) \quad \forall z\in\mathbb{C}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=1$. On appelle j la solution de partie imaginaire positive. Que vaut j^3 ?
3. Etablir que $j^2=\dfrac{1}{j}=\overline{j}$
4. Donner la forme algébrique de j^n suivant les valeurs de l'entier n dans $\mathbb{N}$

Exercice 17. On considère le nombre complexe $z=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique
2. Déterminer le module et un argument de z^2
3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z.
4. Déduire de ce qui précède $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ puis $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 18. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 8 cm).
On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
A tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
   a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si, $|z+1|^2+|z|^2=1$
   b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1 \Longleftrightarrow \left(z+\dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{4}$
   c. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ cherché.

1. Calculer cette expression pour $z=8$

<u>Exercice</u> 19. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. Soit A et B les points d'affixes :

$$z_A = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_B = 3 + i$$

a. Calculer les affixes des points A' et B', images des points A et B par f.

b. On suppose que deux points ont la même image par f.
Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

a. Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$

3. **a.** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$.
En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$, puis entre $arg(z' + 4)$ et $arg(z - 2)$.

b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique $z_E + 4$ et à l'aide du 3)(a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.