IV) Equations du second degré à coefficients réels

IV-1 Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

Travail de l'élève :

– Rappeler les solutions de l'équation $x^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.

– On suppose que $a < 0$. Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.

En déduire que la propriété ci-dessous.

Propriété 1 :

L'équation $x^2 = a$ possède .... solutions dans $\mathbb{C}$:

– Si $a \ldots 0$ ce sont les réels suivants : $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $x_2 = -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

– Si $a \ldots 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et } z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 1 **:**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$x^2 = -3 \qquad z^2 + \frac{3}{4} = 0 \qquad z^2 = \cos^2\theta - 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 0$$

IV-2 Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Travail de l'élève : Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière équivalente

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Rappeler les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) lorsque $\Delta \geq 0$.

- On suppose que $\Delta < 0$. Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

  En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, transformer l'équation considérée en une équation produit.

  En déduire que la propriété ci-dessous.

Théorème 1 :
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède .... solutions dans $\mathbb{C}$:
- Si $\Delta \ldots 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Si $\Delta \ldots 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 2 **:**
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0 \qquad x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$