EXERCICES : ESPACE

I) Centres étrangers juin 2010

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t \\ y &=& -3t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathscr{D}_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 5-t \\ z &=& -2+t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation :
Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D})\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+4t \\ y &=& -2+2t \\ z &=& 3-2t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

II) Polynésie juin 2010

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère :
– les points $A(1\,;1\,;1)$ et $B(3\,;2\,;0)$;
– le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
– le plan (Q) d'équation : $x-y+2z+4=0$;
– la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x+y-z-8=0$

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. **a.** Calculer la distance du point A au plan (Q).
En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0\,;\,2;\,-1)$.
a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 12-5t \\ z &=& 4-3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)
d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
Justifier votre réponse.

III) Liban juin 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On note (D) la droite passant par les points A$(1\ ;\ -2\ ;\ -1)$ et B$(3\ ;\ -5\ ;\ -2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -2-3t \\ z &=& -1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-k \\ y &=& 1+2k \\ z &=& k \end{array}\right. \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

IV) Nouvelle-Calédonie novembre 2009

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IK}}$ et à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.

3. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

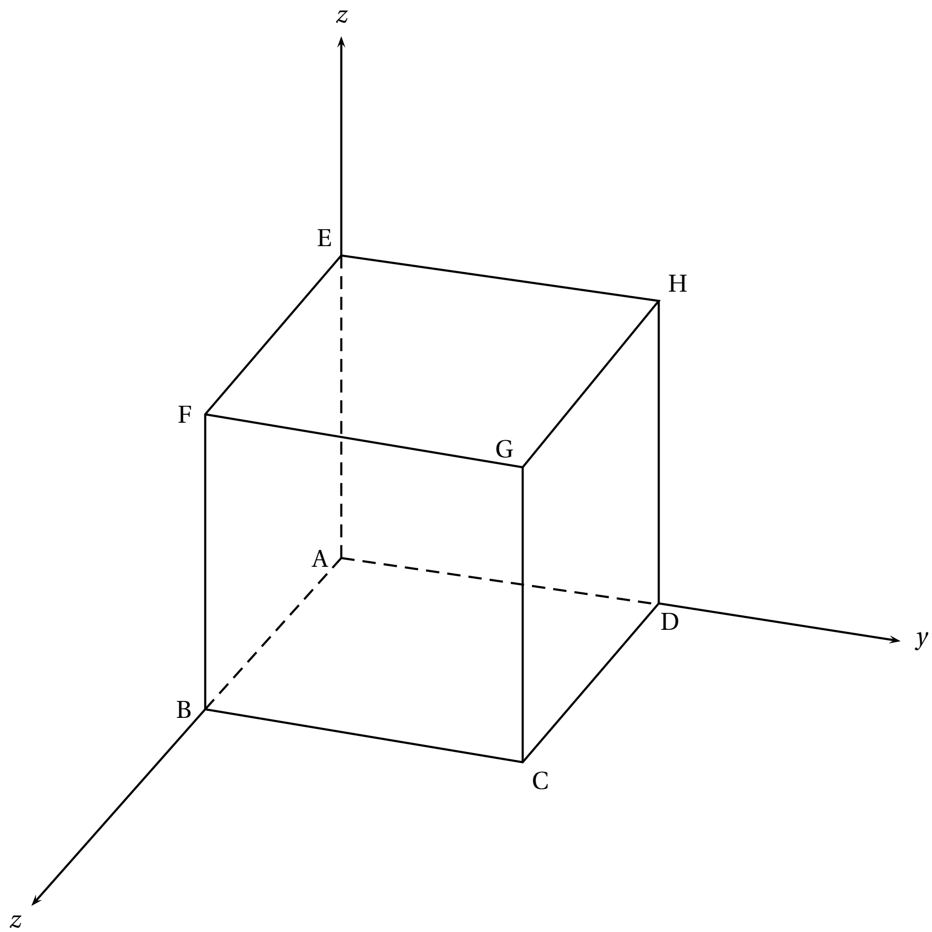
b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

c. Placer le point R sur la figure.

4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

5. **a.** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

b. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par F.
Justifier que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.
Déterminer le rayon de leur intersection.



V) Amérique du Sud novembre 2009

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées $(x_D,\ y_D,\ z_D)$ et P le plan d'équation
$ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(D, P) = \frac{\left|ax_D + by_D + cz_D + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, B de coordonnées $(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$, C de coordonnées $(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et D de coordonnées $(4\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
   Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).

2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

VI) Pondichéry avril 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+2 \\ y & = & -2t \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$,
   $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-3t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -3+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7+2u \\ y & = & 2+2u \\ z & = & -6-u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.
4. On considère les points :
   A, de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, B, de coordonnées $(1\ ;\ 4\ ;\ 0)$, et C, de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ -2)$.
   Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.
5. On considère les points :
   A, de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 3)$, B, de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$, et C, de coordonnées $(4\ ;\ -1\ ;\ 5)$.
   On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

VII) La Réunion juin 2009

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x-y+1=0$.
   On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y+z+2=0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x+z+1=0$.
2. **a.** Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{lcl} x-y+1 & = & 0 \\ -y+z+2 & = & 0 \\ -x+z+1 & = & 0 \end{array}\right.$

   b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).

   c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).
   En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

   On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $(O\vec{i};\vec{j})$, $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{k}\right)$ *et* $\left(O\ ;\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   a. Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

   b. Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

VIII) Centres étrangers juin 2009

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19} ; \frac{45}{19} ; \frac{45}{19}\right)$.
   - **a.** Démontrer que les points H, C, I sont alignés.
   - **b.** Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
   - **c.** En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
4. Calculs d'aire et de volume.
   - **a.** Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.
   - **b.** Déterminer la distance du point O au plan (ABC).
   - **c.** Calculer l'aire du triangle ABC.

IX) Pondichéry avril 2009

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :
A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées (0 ; −2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; −5 ; 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :
Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

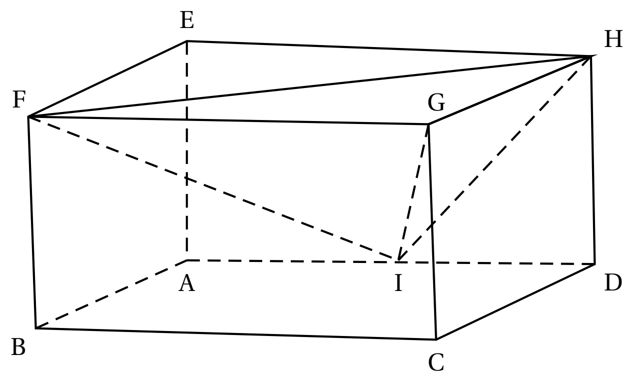
Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3 = 0$.

X) Amérique du Sud novembre 2008

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit
ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. **a.** Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.
   b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\,;\,1\,;\,-1)$.
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).
   c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
4. **a.** La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
   b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
   c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
   Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
   (On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

XI) Asie juin 2008

A -Vrai ou faux ?
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.

Rappel des notations :

- *$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.*
- *L'écriture $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ signifie que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset,$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.
2. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$.
3. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset,$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.
4. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset,$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$

B - Intersection de trois plans donnés

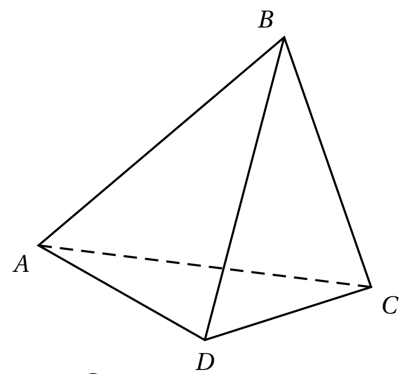
Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considére les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.
2. En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

XII) Pondichéry avril 2008

On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
   (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).
2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

   b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

   b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

   c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

XIII) Amérique du Sud novembre 2007

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2~;~8~;~4)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1~;~5~;~-1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
   Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').
   Montrer que le vecteur de coordonnées $(2~;~1~;~1)$ est un vecteur directeur de (d').
3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
4. On considère le point H de coordonnées $(-3~;~3~;~5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3~;~0~;~-4)$.

   a. Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').

   b. Démontrer que la droite (HH$'$) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

   c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), i.e la distance HH$'$.
5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

XIV) Métropole juin 2008

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(1\,;\,1\,;\,0), \mathrm{B}(1\,;\,2\,;\,1) \text{ et } \mathrm{C}(3\,;\,-1\,;\,2).$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne
   $2x + y - z - 3 = 0$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   Démontrer que l'intersection des plane (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

XV) Pondichéry avril 2006

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. On considère le point I de coordonnées $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_1,\ y_1$ et z_1, un système d'équations paramétriques de Δ.
2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.
   a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.
   b. Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_1,\ y_1$ et z_1.
   c. En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.