Chapitre 11

Produit Scalaire

Hors Sujet

Titre : « Black Swan »

Auteur : Darren Aronofsky

Présentation succinte de l'auteur : Darren Aronofsky est né le 12 février 1969 dans une famille juive de New York. Il s'intéresse assez vite à l'art et entre à l'université Harvard pour étudier les techniques de réalisation et d'animation. Il y fait la rencontre de Sean Gullette avec qui il tourne son court métrage de fin d'études, Supermarket Sweep. En février 1996, il parvient à rassembler les 60 000 dollars nécessaires pour la réalisation de son premier long métrage, π, qui sera un véritable succès, remportant de nombreux prix et souvent classé parmi les 10 meilleurs films de l'année. Il enchaîne en 2000 avec Requiem for a dream, adaptation du roman éponyme de Hubert Selby : un film choc sur l'addiction sous toutes ses formes, montrant la décadence infernale d'un quatuor noyant son quotidien dans des visions faussées du paradis et de la célébrité, avec Jared Leto, Jennifer Connelly, Ellen Burstyn et Marlon Wayans.

En 2010, il sort Black Swan avec Natalie Portman, Vincent Cassel, Mila Kunis, Barbara Hershey et Winona Ryder, qui connaît lui aussi un grand succès et gagne de nombreux prix, notamment l'Oscar 2011 de la meilleure actrice pour Natalie Portman.

Au sujet de Black Swan : « Ce n'est donc pas par plaisir sadique ou goût de la manipulation qu'Aronofsky filme cette descente aux enfers. Il a une vraie obsession, qui lui tient à coeur, et qui le pousse à filmer : la quête de la perfection. »(Cahier du cinéma)

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 11

Produit Scalaire

Résumé

Nous allons développer dans cette leçon une des grandes nouveautés de terminale : le lien entre algèbre et géométrie, deux domaines jusqu'ici étrangers. L'outil central sera le produit scalaire qui sera donc étudié avec attention. Vous verrez l'an prochain qu'un « ensemble de vecteurs »dans lequel on peut définir un produit scalaire est appelé espace euclidien.

I) Définition du produit scalaire et conséquences immédiates

Il y a différentes manières de définir le produit scalaire. Nous avons déjà cette année rencontré cela, particulièrement pour la construction de la fonction exponentielle.

Nous sommes partis de l'équation différentielle $y' = y$, mais nous avons aussi évoquer l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. D'autres encore de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ ou même de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ ... Pourtant, tous ces problèmes construisent la même fonction, car ces définitions s'avèrent équivalentes. La nature du problème étudié, le niveau d'enseignement, etc. incitent alors à préférer l'une ou l'autre des définitions.

Nous choisirons pour la définition du produit scalaire, la méthode la plus adaptée au programme de terminale et n'utiliserons que le théorème de Pythagore en admettant que l'on peut munir l'espace d'un repère orthonormé.

Tout d'abord, nous commençons par étendre les définitions et les propriétés du produit scalaire vus dans le plan à l'espace.

Rappels dans le plan

Soient $\vec{\ }(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$ $\quad$ où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

Pour tout ce chapitre, on munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère également deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

I-1 Définition analytique

Définition 1 : *Produit scalaire dans l'Espace*

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le nombre réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple :

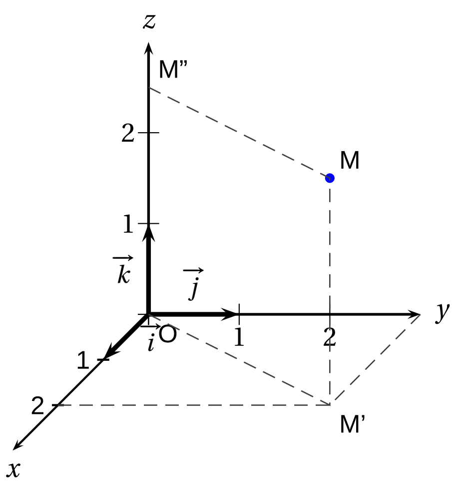
Avec $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(4;5;6)$ on obtient :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 4 + 2\times 5 + 3\times 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Remarques :

– Cette définition suggère que la valeur du produit scalaire de deux vecteurs dépend du repère choisi (puisque les coordonnées en dépendent). Montrons que ceci n'est en réalité pas le cas.
Remarquons tout d'abord que $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$.

Considérons maintenant le point $M(x;y;z)$ de l'espace. Alors $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Grâce au théorème de Pythagore, nous pouvons calculer $||\vec{u}||^2 = OM^2$. En effet :
$OM^2 = OM'^2 + z^2$ et d'autre part, $OM'^2 = x^2 + y^2$. Finalement on obtient que $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

On a donc pour premier résultat

$$||u||^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$$

La longueur d'un vecteur ne dépend pas du repère, par conséquent le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ non plus.

Intéressons-nous maintenant à

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2 = x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2 = x^2+y^2 = ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Ceci montre que le deuxième résultat :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)$$

On peut donc conclure que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ne dépend pas du repère choisi.

– On montre de même que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-||\vec{u}+\vec{v}||^2\right)$$

et que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(||\vec{u}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$$

– On notera, parfois,

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=||\vec{u}||^2$$

De même, si A et B sont deux points on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|^2=AB=\overrightarrow{AB}^2$$

– Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Attention : La réciproque est fausse, en effet soit $\vec{u}(1;2;0)$ et $\vec{v}(-2;1;0)$ alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-2+2=0$$

– Dans le cas où les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires avec $\vec{v}=k\vec{u}$ on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xkx+yky+zkz=k(x^2+y^2+z^2)=k||\vec{u}||^2$$

– Grâce à cette définition, il devient évident que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \iff \vec{u}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$

Remarque : On dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Preuve

Dans un repère orthonormal de l'espace, notons $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'=x'x+y'y+z'z=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $$\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=x\lambda x'+y\lambda y'+z\lambda z'=\lambda xx'+\lambda yy'+\lambda zz'=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(xx'+yy'+zz')=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(x+x')x''+(y+y')y''+(z+z')z''=xx''+x'x''+yy''+y'y''+zz''+z'z''$
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=xx''+yy''+zz''+x'x''+y'y''+z'z''$
   i.e $\quad(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=0\iff x^2+y^2+z^2=0\iff x=0$; $y=0$ et $z=0\iff\vec{u}=\vec{0}$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2+z^2\geq 0$

Exemple :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

I-2 Autres caractérisations du produit scalaire

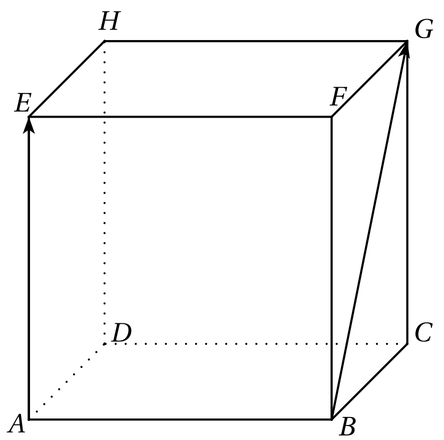
Théorème 1 :

1. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v})$$
2. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ on a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$
où $\vec{v}'$ est le vecteur projeté de $\vec{v}$ selon la direction de $\vec{u}$.

Exemple :

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Calculer de plusieurs façons le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$

- Dans la base orthonormale $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ on a : $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ et $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$, par conséquent :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = 1$$
- Avec le cosinus :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = AE \times BG \times \cos\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BG}\right) = 1^2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$
- Avec le vecteur projeté :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2 = 1^2 = 1$$



Preuve **Hors Programme ?**

Démontrons ces deux relations dans un cas particulier pour commencer.

Cas particulier : $\vec{v} = k\vec{u}$.

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient deux vecteurs colinéaires i.e qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Ainsi :
$$||\vec{v}|| = |k|\,||\vec{u}||$$
Par conséquent :
$$||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}) = |k|\,||\vec{u}||^2\cos(\vec{u};\vec{v})$$
Or, si $k > 0$ alors $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 1$ et donc $|k|\cos(\vec{u};\vec{v}) = k$.

et si $k < 0$ alors $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -1$ et donc $|k|\cos(\vec{u};\vec{v}) = -k \times (-1) = k$.

Ainsi dans tous les cas :
$$|k|\cos(\vec{u};\vec{v}) = k \Longrightarrow ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}) = k\,||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \text{d'après une remarque précédente}$$
De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{v}' = \vec{v}$ d'où le résultat 3..

Preuve (Suite)

Cas général :

Supposons désormais que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient deux vecteurs non colinéaires, on va construire une base orthonormée afin d'appliquer la définition du produit scalaire.

Posons $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ (possible puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Soit $\vec{j}$ un vecteur coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $(\vec{i};\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left|\left|\vec{j}\right|\right| = 1$.

Enfin considérons $\vec{k}$ le vecteur orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ soit une base directe de l'espace.

On obtient la figure suivante : Dans ce repère le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnée $(||\vec{u}||, 0, 0)$.

$\vec{v}$ a pour coordonnées $(||\vec{v}|| \cos(\vec{u};\vec{v}), ||\vec{v}|| \sin(\vec{u},\vec{v}), 0)$.

$\vec{v}'$ a pour coordonnées $(||\vec{v}|| \cos(\vec{u};\vec{v}), 0, 0)$.

On obtient alors, en utilisant la définition :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos(\vec{u};\vec{v})$$

et

$$\vec{u} \cdot \vec{v}' = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos(\vec{u};\vec{v})$$

ce qui démontre les deux résultats.

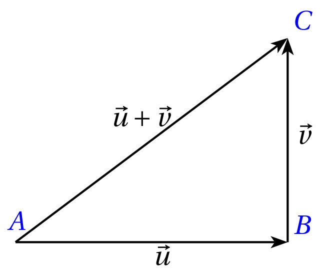
Rajouter une figure !!

Exercices du livre :

n° 3-4-5 p 302 (calcul d'angle et longueur)

I-3 Vecteurs orthogonaux

Nous allons maintenant aborder la notion qui a motivé l'introduction du produit scalaire en Terminale, à savoir l'orthogonalité de deux vecteurs. Considérons la figure suivante :



Si $(AB) \perp (BC)$ alors d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Longleftrightarrow ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} + \vec{v}||^2$$

D'après la remarque précédente on a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = 0$$

Réciproque si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors toujours d'après le même résultat on a :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 0 \Longleftrightarrow ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} + \vec{v}||^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore assure alors que $(AB) \perp (BC)$. Dans ce cas adoptons la notation « naturelle »suivante $\vec{u} \perp \vec{v}$, nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque : Si un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à tout autre vecteur, il est orthogonal en particulier à lui-même.
Par conséquent : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 = \text{ř} \iff x = y = z = 0 \iff \vec{u} = 0$

Exemple :
On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier d'arête a. (*chaque face est un triangle équilatéral de côté* a*)*
Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

Solution **:**

Démontrons ce résultat pour les arêtes $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ (compte tenu de la symétrie de la figure, cela suffira à démontrer le résultat voulu).

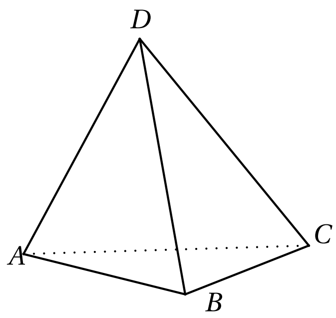
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$
$= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$

De plus $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \times BD \times \cos \dfrac{-\pi}{3} = a^2 \dfrac{1}{2}$

Et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \times BD \times \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{a^2}{2}$.

Ainsi :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$



Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube dont les sommets sont disposés comme sur la figure ci-dessous.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils orthogonaux ?

Solution **:**

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AH}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\right) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont leurs directions contenus dans des plans orthogonaux, par conséquent :

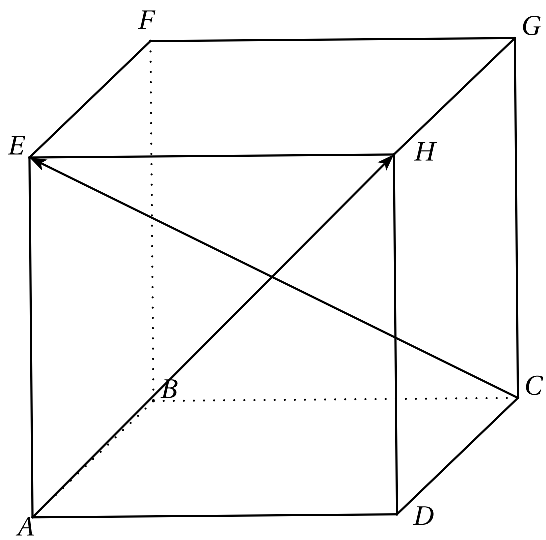
$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

De plus $[AH]$ et $[DE]$ sont les diagonales d'un carré donc

$$(AH) \perp (DE) \iff \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$$

Au final :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 + 0 = 0 \iff \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CE}$$



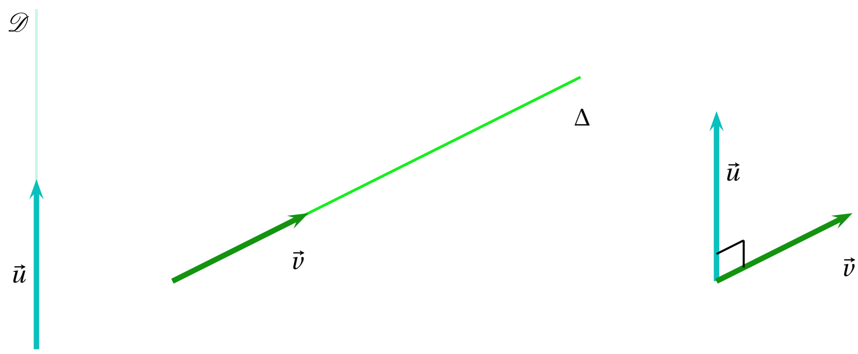
II) Applications du produit scalaire dans l'espace : Géométrie analytique

II-1 Orthogonalité

Définition 2 : *Droites orthogonales*

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{D}'$ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

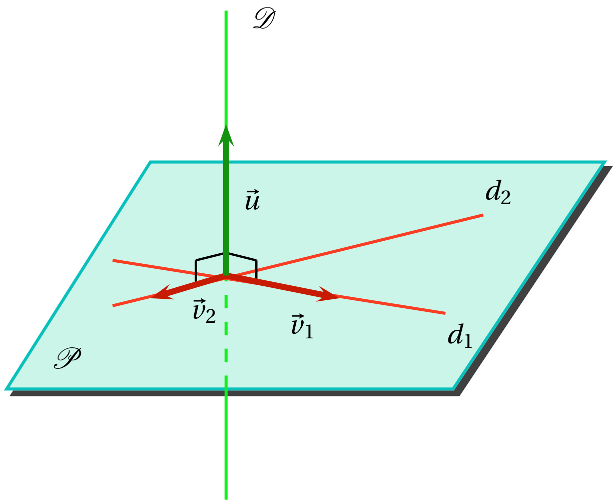
On dit que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales et on note $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$ ie si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Définition 3 : *Droite orthogonale à un plan*

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

On dit que la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont orthogonaux et on note $\mathscr{D} \perp \mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{v}_2 \end{cases}$ ie si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$



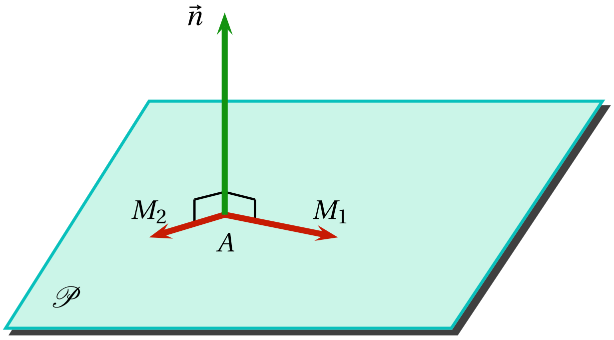
Remarques :

– On peut montrer que cela revient en fait à dire que $\mathscr{D} \perp \mathscr{P} \iff$ pour tous points M et N de $\mathscr{P}$ on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$

– La direction d'une droite est déterminée par la donnée d'un vecteur. Le problème pour un plan, c'est qu'on a besoin a priori de deux vecteurs. Cependant, si un plan a deux directions, il n'a qu'une seule « direction orthogonale » Donc la direction du plan sera entièrement déterminé par la donnée d'un vecteur orthogonal à celui-ci.

Définition 4 : *Vecteur normal à un plan*

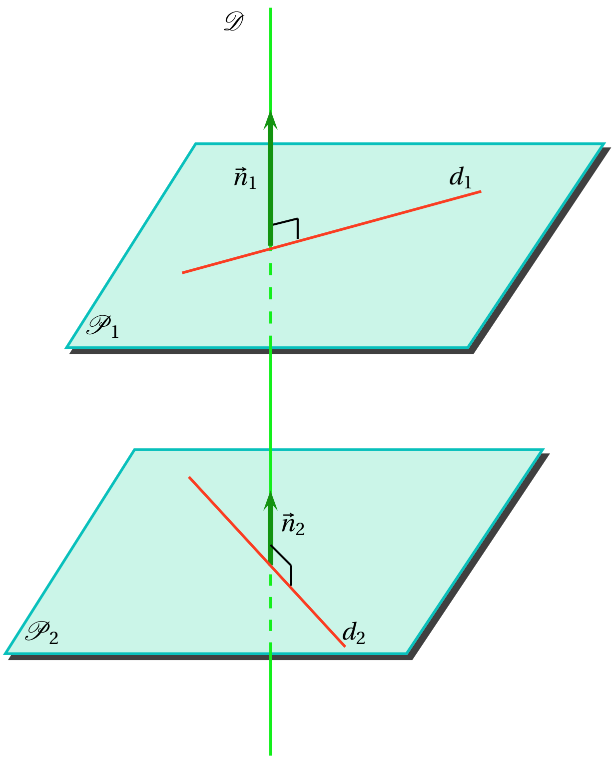
Etant donné un plan $\mathscr{P}$, on appelle vecteur normal à $\mathscr{P}$ tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.



Remarque : La notion de vecteur normal à un plan nous permet d'établir des caractérisations simples de positions relatives de plan, ainsi que des équations de plan, calcul de distances ...

Définition 5 : *Plans parallèles*

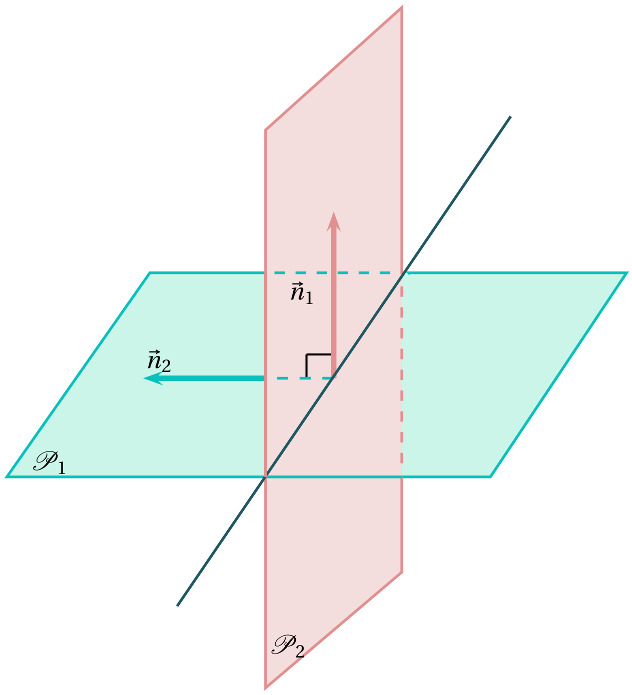
Deux plans de l'espace sont dits parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires.



Remarque : Les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Définition 6 : *Plans orthogonaux*

Deux plans de l'espace sont dits orthogonaux lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

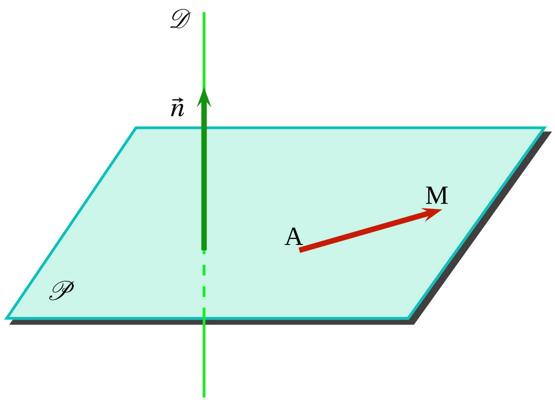


Remarque : En particulier $\vec{n}_1$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}_2$ et $\vec{n}_2$ est un vecteur directeur de $\mathscr{P}_1$.

II-2 Equation cartésienne d'un plan

Soit A un point d'un plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal à P.
On a, pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors $M \in P$.

On a donc le résultat suivant :

Propriété 1 : *Caractérisation d'un plan $\mathscr{P}$*
Le plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Travail de l'élève **1.** On donne $A(1;2;3)$ et $\vec{n}(1;-3;1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point M pour qu'il appartienne au $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$.

Solution **:**
Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a alors :

$$M \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1)-3(y-2)+(z-3)=0 \iff x-3y+z+2=0$$

Pour que M appartiennent à $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation $x-3y+z=-2$.
On dit que $\mathscr{P}$ a donc pour équation $\quad x-3y+z=-2$

Théorème 3 :

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout plan $\mathscr{P}$ admet une équation (dite cartésienne) de la forme :

$$ax+by+cz=d$$

avec a, b, c réels non tous nuls et d réel.
De plus le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P

Preuve

Notons $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de P et $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x;y;z)\in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

i.e

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \Longleftrightarrow ax-ax_A+by-by_A+cz-cz_A=0 \Longleftrightarrow ax+by+cz=\underbrace{ax_A+by_A+cz_A}_{d}$$

En posant $d=ax_A+by_A+cz_A$ qui est une constante, on obtient le résultat désiré.

Remarques :

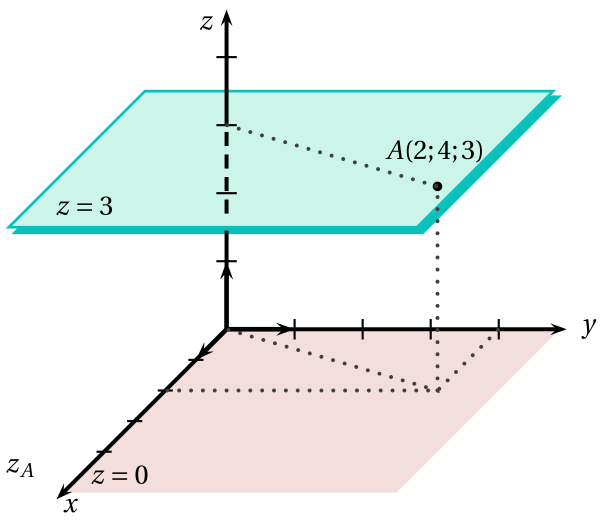
– Notons que l'équation d'un plan n'est pas unique. En effet si $P: x+y+z=1$ alors P a aussi pour équation $2x+2y+2z=2$.
– **Attention** : l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation $ax+by=c$ avec a, b et $c\in\mathbb{R}$ est une droite dans le plan, mais dans l'espace, il s'agit d'un plan !
– **Quelques cas particuliers :**

Le plan (Oxy) a pour équation $z=0$.
En effet $O(0;0;0)\in(Oxy)$ et $\vec{k}(0;0;1)$ est normal à ce plan, ainsi :

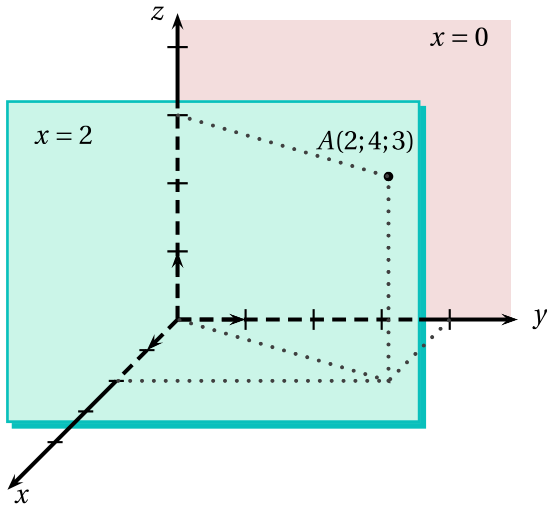
$$M(x;y;z)\in(Oxy) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}=0 \Longleftrightarrow z=0$$

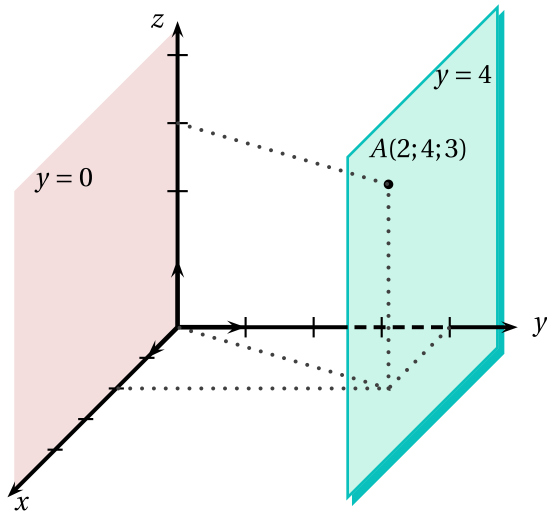
On peut montrer de même que tout plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan (Oxy) a une équation du type $z=d$ où d est une constante.
En effet soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de $\mathscr{P}$. Comme $\vec{k}(0;0;1)$ est normal à $\mathscr{P}$, on a :

$$M(x;y;z)\in\mathscr{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{k}=0 \Longleftrightarrow z-z_A=0 \Longleftrightarrow z=z_A$$



De la même manière les plans (Oxz) et (Oyz) ont respectivement pour équation $y=0$ et $x=0$.
De plus, tout plan parallèle à (Oxz) admet une équation du type $y=d$ où d est une constante.
Et tout plan parallèle à (Oyz) admet une équation du type $x=d$ où d est une constante.





Exemple :

Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $B(-2;1;3)$ et orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ avec $A(1;-2;2)$ et $C(4;1;-1)$.

Propriété 2 :
Soit deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations

$$\mathscr{P} : ax+by+cz+d=0 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{Q} : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

1. $\mathscr{P} // \mathscr{Q} \iff (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels.
2. $\mathscr{P} \perp \mathscr{Q} \iff aa'+bb'+cc'=0$.

Preuve

1. $\mathscr{P} // \mathscr{Q} \iff \vec{n}(a;b;c) = k\vec{n'}(a';b';c')$
2. $\mathscr{P} \perp \mathscr{Q} \iff \vec{n} \perp \vec{n'} \iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \iff aa'+bb'+cc'=0$

Exemples :

Montrer que les plans $\mathscr{P} : 3x+2y-4z=36$ et $\mathscr{Q}_1 : -\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}z = 21$ sont parallèles.
Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}_2 : -5x+6y-\frac{3}{4}z=3$ sont orthogonaux.
Montrer alors de deux manières différentes que $\mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$ sont orthogonaux.

Exemple :
On donne les équations cartésiennes de deux plans $P : x-4y+7=0$ $\qquad Q : x+2y-z+1=0$.
Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.

Remarque : On dit que la droite d est représentée par le système d'équation : $\begin{cases} x-4y+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$, puisqu'un point $M \in d$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système.
Dans le prochain chapitre, nous apprendrons à caractériser les droites de l'espace d'autres manières. En effet, un système n'est pas un outil très manipulable ...

Exercices du livre :
Corrigé : n° 1 p 299 (plan médiateur)
n° 15-16 p 303 + 25 p 304 + 34 p 305

II-3 Demi-espace

Tout plan P sépare l'espace en deux parties, que l'on appelle demi-espace.

Définition 7 :
On appelle demi-espaces (ouverts) délimités par $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des points $M(x;y;z)$ définis respectivement par les conditions :

$$\mathscr{E} : ax+by+cz>d \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F} : ax+by+cz<d$$

Remarque : On définit de la même manière les demi-espaces fermés (contenant le plan frontière) à l'aide d'inégalités larges.

Exemple :
Caractérisation de l'intérieur d'un cube.
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1.
On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
Les points M(x, y, z) situés à l'intérieur du cube sont ceux qui vérifient :

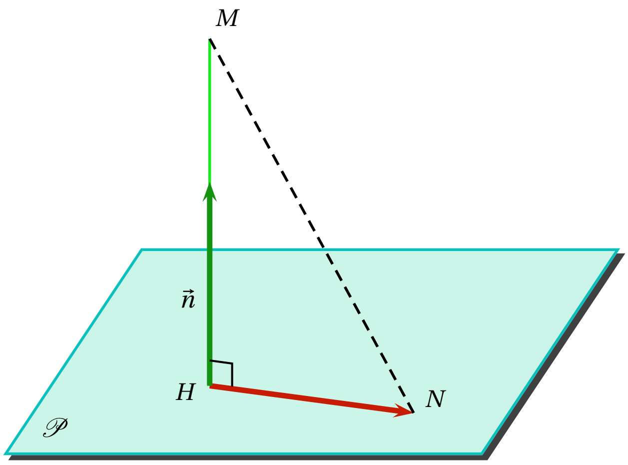
$$\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<y<1 \\ 0<z<1 \end{cases}$$

Exemple :
On donne $A(1;1;1)$, $B(3;-1;-3)$, $C(2;-1;4)$.

1. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Donner une inéquation du demi-espace de frontière (ABC) et contenant le point $D(4,1,-5)$.

II-4 Distance d'un point à un plan

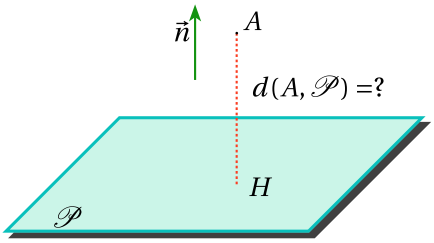
Définition 8 :
Soit M un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan.
On appelle distance de M à $\mathscr{P}$ la distance MH, où H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.
On la note $d(M,\mathscr{P})$.



Remarque : MH est en fait le minimum des distances MN, pour $N \in \mathscr{P}$.

On cherche à calculer cette distance dans le cas général. Soient :

- $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$,
- $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace
- et $H(x_H;y_H;z_H)$ son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$.



Nous savons que le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P.

Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, ie il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$. Par conséquent, en utilisant la caractérisation du produit scalaire avec le cosinus

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}=\pm AH\times||\vec{n}||=\pm d(A,\mathscr{P})\times||\vec{n}||$$

Le signe dépendant des sens respectifs de $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$. On ne les connait pas a priori, ceci dit, on cherche une distance, donc on peut se contenter de regarder les valeurs absolues. On a :

$$|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}|=d(A,\mathscr{P})\times||\vec{n}||$$

De plus, on sait que $H\in P$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ et on a $ax_H+by_H+cz_H+d=0$. On a donc, en utilisant la définition du produit scalaire sur les coordonnées :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}=a(x_H-x_A)+b(y_H-y_A)+c(z_H-z_A)=-(ax_A+by_A+cz_A+d)$$

D'où :

$$|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}|=|ax_A+by_A+cz_A+d|$$

Au final $d(A,\mathscr{P})\times||\vec{n}||=\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|$. D'où le résultat à connaitre suivant.

Proposition 1 : *Distance d'un point à un plan*

$$d(A;\mathscr{P})=\frac{|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Remarque : Retenir l'idée de cette démonstration qui est de calculer $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}$ de deux manières différentes.

Exemples :

Calculer la distance du point A au plan P.

1. $A(1;-1;1)$ et P est le plan d'équation $2x+y-z-3=0$.
2. $A(2;1;0)$ et P est le plan passant par l'origine du repère, de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;-1)$.

Propriété 3 : *Volume d'un tétraèdre*

Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ et de hauteur $[AH]$ où H est le projeté orthogonal de A sur (BCD) est

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}AH\times S=\frac{1}{3}d\big(A;(BCD)\big)\times S$$

où S est l'aire de la face BCD.

Preuve

On pourrait par exemple utiliser les intégrales.

Exercices du livre :
n° 18 p 303 + 46 p 306

II-5 Équation d'une sphère

Définition 9 :
La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\Omega M = r$.

Théorème 4 :
Toute sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega;z_\Omega)$ et de rayon r admet une équation de la forme :

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2$$

Preuve
$M(x;y;z)\in\mathscr{S}\iff \Omega M^2=r^2\iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2$

Exemples :

1. Démontrer que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2=0$ est une sphère, dont on déterminera le centre Ω et le rayon r.
2. Le plan $\mathscr{P}: x-2y+2z+1=0$ est-il sécant à la sphère ? *Calculer la distance de Ω au plan ...*

Théorème 5 :
La sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Preuve
Soit Ω le milieu de $[AB]$ (et donc le centre de la sphère), alors pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace on a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)=\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A}\right)=M\Omega^2-\Omega A^2=M\Omega^2-r^2$$

On en déduit $M\in\mathscr{S}\iff M\Omega^2=r^2\iff M\Omega^2-r^2=0\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Exemple :
Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(0;0;1)$ et $B(1;2;3)$. Préciser son centre Ω et son rayon r.

Solution **:**
D'après le théorème précédent on a :

$$M(x;y;z)\in\mathscr{S}\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\iff -x(1-x)-y(2-y)+(1-z)(3-z)=0$$

On obtient alors $x^2-x+y^2-2y+z^2-4z+3=0$
Pour retrouver son centre et son rayon, on canonise :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y-1)^2-1+(z-2)^2-4+3=0\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$\mathscr{S}$ est donc la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et pour rayon $r=\frac{3}{2}$

Remarque : On pouvait simplement trouver ce résultat en calculant les coordonnées du milieu de $[AB]$ pour obtenir le centre et en calculant la moitié du diamètre AB pour obtenir le rayon

Exercices du livre :

n° 35 p 305

Exercices du livre :

Annale Amérique du Sud Nov 2009 jusqu'à C.1.