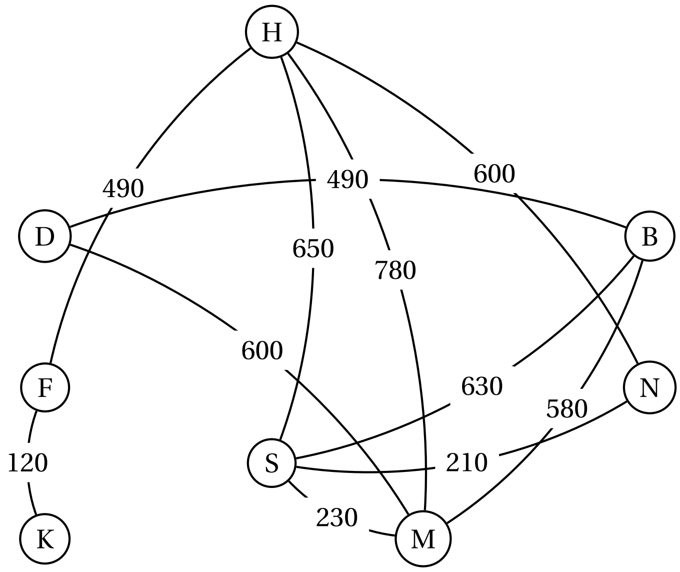
Exercices : Graphes et Probabilités

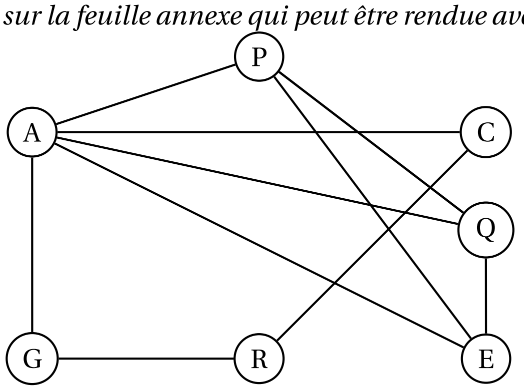
Exercice 1 : Amérique du Sud Nov 2005 **5 points**

1. À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.
   Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.



   En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.

2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.
   L'objectif de cette question consiste à rechercher une répartition des supporters afin d'utiliser le minimum d'hôtels.
   On donne ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B .
   Ce même graphe figure sur la feuille annexe qui peut être rendue avec la copie.



   a. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.

   b. Proposer une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

Exercice 2 : Asie Juin 2003 **5 points**

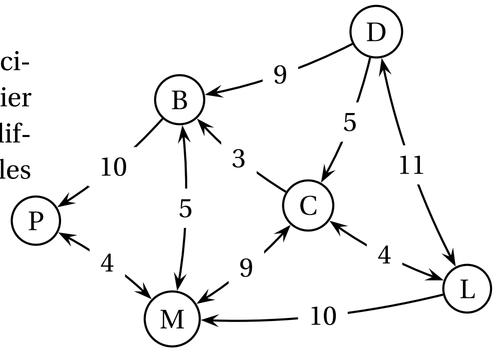
Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

	B	C	L	M	P
B		X		X	X
C	X		X	X	
L		X		X	
M	X	X	X		X
P	X			X	

1. Dessiner un graphe représentant cette situation.
2. Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.

   Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

3. Dimitri habite dans cette ville ; le graphe ci-contre donne le **nouveau** plan du quartier avec les sens de circulation dans les différentes rues et le temps de parcours entre les différents lieux.



Dimitri désire prendre sa voiture pour se rendre de son domicile noté D jusqu'à la piscine.

Proposer un trajet le plus court possible lui permettant de se rendre de son domicile à la piscine.

La réponse proposée devra être justifiée par un algorithme.

Exercice 3 : Métropole Sept 2005 — 5 points

Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :
- si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;
- si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

1. **a.** Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.
   b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = (1\ ;\ 0)$. Donner la matrice ligne P_1 exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.
3. On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}287\,45 & 0{,}712\,55 \\ 0{,}285\,02 & 0{,}714\,98 \end{pmatrix}$
   a. Calculer le produit P_0M^5. En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.
   b. Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?
4. Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?

Exercice 4 : Amérique du Sud Nov 2004 — 5 points

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
P_n la matrice $(a_n\ ;\ b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times \text{M}$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5. Déterminer le réel x tel que $(x\ ;1-x) \times \text{M} = (x\ ;\ 1-x)$.
   On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

Exercice 5 **: Polynésie Sept 2006** **5 points**

Une commune possède deux clubs de sport que l'on note A et B.
Le club A est installé depuis 1990, le club B a ouvert ses portes au cours de l'année 2004. Au premier janvier 2005, on constate que 1 100 personnes sont abonnées au club A et 400 au club B.
Le prix de l'abonnement est moins coûteux au club A ; les activités proposées sont plus nombreuses au club B. Aussi, chaque année, 14 % des abonnés au club A changent pour le club B et 6 % des abonnés au club B changent pour le club A. On suppose que la population totale des abonnés reste constante et qu'une personne ne s'abonne jamais aux deux clubs en même temps.
On note a_n le nombre d'abonnés au club A et b_n le nombre d'abonnés au club B au premier janvier de l'année $2005 + n$.
E_n désigne la matrice ligne $(a_n \ \ b_n)$; ainsi $E_0 = (a_0 \ \ b_0) = (1\,100 \ \ 400)$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste.

2. **a.** Écrire la matrice de transition M telle que $E_{n+1} = E_n \times M$.
En déduire E_n en fonction de E_0, M et n. On ne demande pas de démontrer le résultat.

b. Calculer M^2 . En déduire le nombre d'abonnés aux deux clubs au premier janvier 2007.

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 90$.

b. Pour n entier naturel, on pose : $u_n = a_n - 450$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 650 \times 0,8^n + 450$.

d. Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat pour les deux clubs sportifs.