

DEVOIR MAISON 2

Exercice 1.

(7 points)

En 2004, un hôpital s'est ouvert à Narbonne. Il y a eu alors 500 patients accueillis dans l'année. Le directeur prévoit d'accueillir 20 patients de plus par an. On désigne par u_0 le nombre de patients en 2004, u_1 le nombre de patients en 2005, ... u_n le nombre de patients en 2004 + n .

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n) .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Avec ses estimations, combien de patients le directeur recevra-t-il en 2011 ?
5. (a) En supposant que l'hôpital a une capacité d'accueil suffisante, en quelle année N doublera-t-elle son nombre de patients par rapport à 2004 ?
(on pourra faire un tableau de valeur sur sa calculatrice de u_n en fonction de n et lire la réponse)
- (b) Déterminer le nombre de patients que l'hôpital aura reçu entre l'année 2004 et l'année 2011 (incluses).

Exercice 2.

(13 points)

Le prix d'achat d'une machine dans un hôpital est de 12150 €.

Son **coût d'entretien** s'élève chaque année à $500 + 1200n$ €, où n est le rang de l'année.

On suppose que l'entretien assure le bon fonctionnement de la machine.

Le **coût total** de la machine est égal à son prix d'achat augmenté de *la somme de tous* les coûts d'entretien.

Son **coût moyen** est le coût total divisé par la durée de son utilisation.

La **durée d'utilisation optimale** est celle qui correspond au *minimum du coût moyen*. L'objectif de l'exercice est de déterminer la durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement maximum de huit ans.

1. (a) Calculer le coût annuel d'entretien la première année puis son coût total (entretien + achat).
(b) Calculer le coût annuel d'entretien la deuxième année puis son coût total (entretien total + achat) et son coût moyen sur les deux ans.
(c) Calculer le coût annuel d'entretien la troisième année puis son coût total et son coût moyen sur les trois ans.
2. On note (u_n) la suite des coûts annuels d'entretien, en euros. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_n = 500 + 1200n$$

- (a) Donner u_1 et u_2 .
- (b) Montrer que (u_n) est arithmétique et donner sa raison.
(pour cela on montrera que $u_{n+1} - u_n = 1200$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.)

(c) On rappelle que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (\text{Nombres de termes}) \frac{u_1 + u_n}{2}$$

Calculer la somme des coûts d'entretien pour les 5 premières années, puis pour les 8 premières.

(d) Remplacer dans la formule précédente toutes les quantités littérale par leur expression donnée dans l'exercice ou calculée, puis simplifier la formule obtenue afin de montrer que

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n(1100 + 600n)$$

3. On note C_m le coût moyen de la machine l'année n . Démontrer que

$$C_m(n) = 1100 + 600n + \frac{12150}{n}$$

4. On considère la fonction $C_m : x \mapsto 1100 + 600x + \frac{12150}{x}$ sur l'intervalle $]0; 8]$. C_m modélise l'évolution du coût moyen de la machine sur 8 années.

(a) Tracer la courbe représentative de C_m sur papier millimétré sur l'intervalle $]0; 8]$

(b) D'après cette représentation graphique, donner le tableau de variations de la fonction C_m

(c) À l'aide de la calculatrice, donner à 10^{-2} près, une valeur décimale approchée du nombre réel qui minimise $C_m(x)$ et une valeur entière approchée de ce minimum.

(d) En déduire une durée optimale d'utilisation de la machine pour un fonctionnement d'au maximum 8 ans.