Devoir Maison 2

Exercice 1. (7 points)

1. $u_1 = 520$ et $u_2 = 540$.
2. $u_{n+1} = u_n + 20$. La différence entre deux termes consécutifs est constante égale à 20.
   La suite (u_n) est arithmétique de raison 20.
3. $u_n = u_0 + rn = 500 + 20n$.
4. En 2011, $n = 2011 - 2004 = 7$. On calcule donc $u_7 = 500 + 20 \times 7 = 500 + 140 = 640$.
   L'hôpital devrait accueillir 640 patients.
5. (a) On regarde sur la calculatrice, avec un tableau de valeurs, pour quel n la valeur de u_n dépasse 1000.
   On trouve que $u_{25} = 1000$. Donc le nombre de patients doublera en $2004 + 25 = 2029$.

   (b) Le nombre de patients que l'hôpital aura reçu entre l'année 2004 et l'année 2011 (incluses) est la somme S des termes consécutifs de u_0 à u_7. On a

   $$S = 8 \times \frac{u_0 + u_7}{2} = 8 \times \frac{500 + 640}{2} = 8 \times \frac{1140}{2} = 4560$$

   L'hôpital aura reçu entre l'année 2004 et l'année 2011 (incluses) 4560 patients.

Exercice 2. (13 points)

1. (a) Le coût annuel d'entretien la première année est $500 + 1200 \times 1 = 1700$ €
   Son coût total est $1700 + 12150 = 13850$ €.

   (b) Le coût annuel d'entretien la deuxième année est $500 + 1200 \times 2 = 2900$ €
   Son coût total est $2900 + 1700 + 12150 = 16750$ €.
   Son coût moyen sur les deux ans est $\frac{16750}{2} = 8375$ €.

   (c) Le coût annuel d'entretien la troisième année est $500 + 1200 \times 3 = 4100$ €
   Son coût total est $4100 + +2900 + 1700 + 12150 = 20850$ €.
   Son coût moyen sur les deux ans est environ de $\frac{20850}{3} = 6950$ €.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = 500 + 1200n$

   (a) Donner $u_1 = 1700$ et $u_2 = 2900$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 500 + 1200(n+1) = 500 + 1200n + 1200 = 1700 + 1200n$
   $u_{n+1} - u_n = 1700 + 1200n - (500 + 1200n) = 1700 + 1200n - 500 - 1200n = 1700 - 500 = 1200$.
   La différence entre deux termes consécutifs est toujours le même nombre, à savoir 1200. Donc (u_n) est arithmétique de raison 1200.

   (c) La somme des coûts d'entretien pour les 5 premières annés est

   $$S_5 = 5 \times \frac{u_1 + u_5}{2} = 5 \times \frac{1700 + u_5}{2}$$

   Or $u_5 = u_1 + r \times 4 = 1700 + 1200 \times 4 = 1700 + 4800 = 6500$. Donc

   $$S_5 = 5 \times \frac{1700 + 6500}{2} = 5 \times \frac{8200}{2} = 5 \times 4100 = 20500$$

Donc la somme des coûts d'entretien pour les 5 premières annés est de 20 500 €
La somme des coûts d'entretien pour les 8 premières années est

$$S_8 = 8 \times \frac{u_1 + u_8}{2} = 8 \times \frac{1700 + u_8}{2}$$

Or $u_8 = u_1 + r \times 7 = 1700 + 1200 \times 7 = 1700 + 8400 = 10100$. Donc

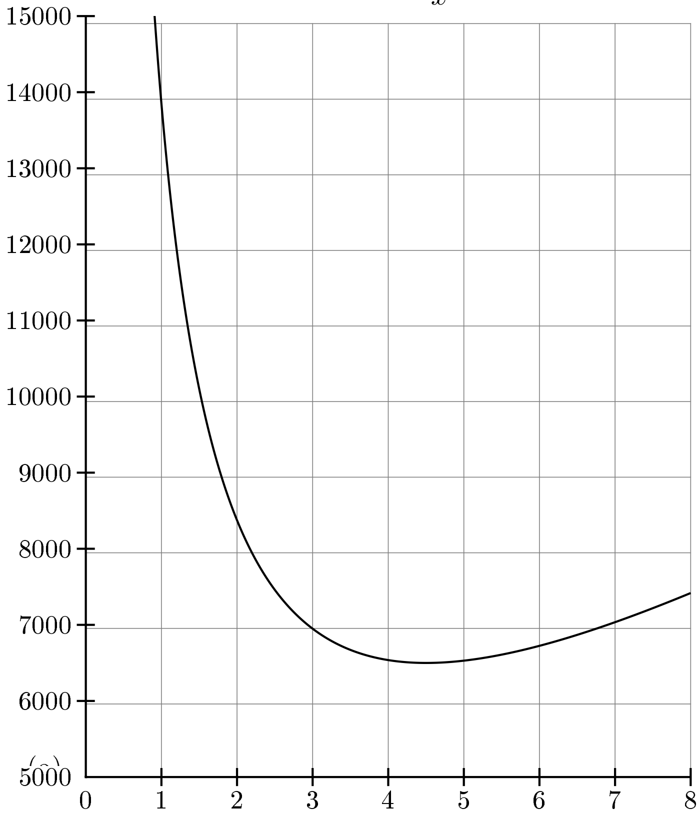
$$S_8 = 8 \times \frac{1700 + 10100}{2} = 8 \times \frac{11800}{2} = 8 \times 5900 = 47200$$

Donc la somme des coûts d'entretien pour les 8 premières annés est de 47 200 €

(d) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n \times \dfrac{1700 + 500 + 1200n}{2} = n \times \dfrac{2200 + 1200n}{2} = n \times \dfrac{2(1100 + 600n)}{2}$
Au final on a $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n(1100 + 600n)$

3. $C_m(n) = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + 12150}{n} = \dfrac{n(1100 + 600n) + 12150}{n} = \dfrac{n(1100 + 600n)}{n} + \dfrac{12150}{n}$
Donc $C_m(n) = 1100 + 600n + \dfrac{12150}{n}$

4. On considère la fonction $C_m : x \longmapsto 1100 + 600x + \dfrac{12150}{x}$ sur l'intervalle $]0; 8]$.



(b)

x	0	4,5	8
C_m		6500	7418

(c) À 10^{-2} près, une valeur décimale approchée du nombre réel qui minimise $C_m(x)$ est $x = 4,50$ et $C_m(x) = 6500$.

(d) Il faut utiliser la machine pendant 4 années et 6 mois