

---

Chapitre 2 : Les suites  
numériques

C. Aupérin

2009-2010

---

## Table des matières

**COURS : LES SUITES NUMÉRIQUES**

# 1 Définition et génération d'une suite

## 1.1 Introduction

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots, \dots, \dots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, \dots, \dots$$

$$-3, 1, 5, 9, \dots, \dots, \dots$$

En mathématiques, une **suite**  $u$  est une **liste ordonnée de nombres réels** : les éléments de cette liste :

- Sont appelés **termes**
- Sont repérés par leur rang dans la liste

Le 1<sup>er</sup> terme de la suite  $u$  est souvent noté  $u_0$  (ou  $u_1$ ),

Le 2<sup>me</sup> terme de la suite  $u$  est souvent noté  $u_1$  (ou  $u_2$ )

.....

.....

Le  $n^{me}$  terme de la suite  $u$  est souvent noté  $u_{n-1}$  (ou  $u_n$ )

Le terme précédent  $u_n$  est  $u_{n-1}$ , le suivant  $u_{n+1}$ .

On note  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour signifier que le rang d'un terme de la suite  $u$  est un entier naturel (sans "fin" de liste). On a donc :

$$\underbrace{\text{nom de la suite}}_u = ( \underbrace{\text{1er terme}}_{u_0} ; \underbrace{\text{2nd terme}}_{u_1} ; u_2 ; \dots ; u_{n-1} ; \underbrace{\text{terme de rang } n}_{u_n} ; u_{n+1} ; \dots )$$

## 1.2 Définition

**Définition 1.** Une suite numérique est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  (ou sur  $\mathbb{N}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$

*Exemple :* Soit la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -2n^2 + 3n + 1$ . Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

### 1.3 Mode de génération

Une suite peut être engendrée de deux manières :

#### Définition "par récurrence"

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  telle que  $f(I) \subset I$ .

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite **à partir du terme précédent**. Par exemple, on se donne

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$$

On a ainsi

$$u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times \dots + 1 = \dots,$$

$$u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times \dots + 1 = \dots,$$

$$u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times \dots + 1 = \dots, \text{ etc}$$

#### Avec une calculatrice :

Tapez la valeur du premier terme, puis tapez sur **EXE** (ou **ENTER**)

On utilise la touche **Ans** de la calculatrice, qui est un rappel du résultat du calcul précédent :

Dans notre exemple  $-2 \times$  **SHIFT** **Ans**  $+1$ , puis **EXE** (ou **ENTER**)

Vous voyez apparaître la valeur de  $u_1$  ; à chaque fois que vous appuyez sur **EXE**, le terme suivant de la suite apparaît...

#### Remarques :

- On visualise ainsi facilement comment l'on passe d'un terme au suivant (le lien logique qui lie les termes entre eux)
- Dans l'exemple précédent, pour calculer  $u_{100}$ , il faut connaître  $u_{99}$ , et pour calculer  $u_{99}$ , il faut connaître  $u_{98}$ , ainsi de suite ... Il est alors préférable d'exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour calculer  $u_{100}$  directement.

#### Définition "explicite" du terme de

rang  $n$ ,

$$u_n = f(n)$$

où  $f$  est une fonction définie sur un intervalle du type  $[a; \infty]$  (avec  $a$  réel).

Par exemple, on se donne  $u_n = -5 + 7n$  pour  $n \geq 0$  ( $u_n = f(n)$  avec  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -5 + 7x$ .)

On a ainsi

$$u_0 = \dots, u_2 = \dots, u_3 = \dots, u_7 = \dots, \text{ etc}$$

#### Avec une calculatrice :

Entrez la suite comme une fonction dans le menu "Tableau", par exemple  $Y1=-5+7X$

Puis réglez les paramètres du tableau de valeurs :

Start=0, End=20, Pitch=1 (sur Casio)

TblStart=0,  $\Delta$ Tbl=1 (sur TI)

Puis affichez ce tableau de valeurs : vous avez, dans l'ordre, les termes de cette suite à partir de  $u_0$ .

1.4 Sens de variation

**Définition 2.**

- La suite  $(u_n)$  est une suite croissante si et seulement si, pour tout entier  $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite  $(u_n)$  est une suite décroissante si et seulement si, pour tout entier  $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite  $(u_n)$  est une suite constante si et seulement si, pour tout entier  $n, u_{n+1} = u_n$

**Méthodes :**

► Pour étudier le sens de variation d'une suite , on étudie généralement le signe de la différence selon les valeurs de  $n$  :

Par exemple, si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $u_n = n + 2$ , alors on a

$$u_{n+1} = (\dots) + 2 = \dots$$

Ainsi pour tout  $n$  on a  $u_{n+1} - u_n = \dots$

On voit que  $u_{n+1} - u_n \dots 0$ , et donc que  $u_{n+1} \dots u_n$  pour tout  $n$  : la suite est donc  $\dots$

► Si jamais tous les termes de la suite  $u$  sont strictement positifs, on peut comparer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec 1 :

Par exemple, pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = 2 \times 5^n$ , on a  $u_n \dots 0$  pour tout entier naturel  $n$  et  $u_{n+1} = \dots$

Ainsi pour tout  $n$  on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

On voit que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \dots 1$ , et donc que  $u_{n+1} \dots u_n$  pour tout  $n$  : la suite est donc  $\dots$

**Exercice 1.1.** Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = 4n + 3$

1. Calculer  $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que  $(u_n)$  est croissante

**Exercice 1.2.** Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = -2n + 1$

1. Calculer  $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que  $(u_n)$  est décroissante

**Exercice 1.3.** Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

1. Calculer  $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que  $(u_n)$  est croissante

**Remarque :** Toutes les suites ne sont pas monotones : par exemple, la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = (-1)^n$  ne l'est pas :  $u_0 = \dots, u_1 = \dots, u_2 = \dots, u_3 = \dots, u_4 = \dots$ , etc

## 2 Suites arithmétiques

### 2.1 Définition

**Définition 3.** Une suite  $u$  de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} = u_n + r$

Autrement dit, une suite arithmétique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre appelé raison.

*Exemple :* Soit la suite  $u$  arithmétique, de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $r = -2$ .

La définition de  $u$  par récurrence est  $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \dots \\ u_{n+1} = \dots \end{array} \right.$

Les premiers termes de cette suite sont  $u_1 = \dots, u_2 = \dots, u_3 = \dots, u_4 = \dots, u_5 = \dots, u_6 = \dots$

**Exercice 2.1.** Soit  $u$  la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison  $r = 3$

1. Donner la définition par récurrence de la suite  $u$
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

**Méthodes :**

**Reconnaître une suite arithmétique :**

Pour qu'une suite  $u$  soit arithmétique, il faut et il suffit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la différence  $u_{n+1} - u_n$  soit constante :  $u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $r$  est alors la raison de la suite  $u$ .

*Exemple :* Par exemple, soit  $u$  définie par  $u_n = 5 - 3n$ .

On a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \dots$

Donc la suite  $u$  est arithmétique, et sa raison est  $r = \dots$

Or  $u_{n+1} - u_n = 5 > 0$  donc la suite est  $\dots$

**Propriété 1. Relation entre deux termes d'une suite arithmétique :**

Soit une suite arithmétique  $u$ , de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ .

- **Relation entre  $u_n$  et  $u_0$  :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_0 + nr$
- **Relation entre  $u_n$  et  $u_p$  :** Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_p + (n - p)r$
- **Relation entre  $u_n$  et  $u_1$  :** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

**Exercices du livre :**  $2 + 4 + 5 + 7 + 9 + 13$  p 20 (calcul de termes)

**THÉORÈME 1.**  $u$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de terme initial  $u_0$  :

- Si  $r < 0$ , la suite est décroissante.
- Si  $r > 0$ , la suite est croissante.
- Si  $r = 0$ , la suite est constante.

**Exercice 2.2.** Un nouvel article, dont le prix initial était de 250-€, voit son prix baisser tous les mois de 10%. La suite  $u$  des prix mensuels de cet article est donc géométrique

1. Préciser sa raison et son premier terme
2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
3. Donner le sens de variation de la suite  $u$

**Exercices du livre :** 27 – 28 – 29 – 30 – 32 p 22 (sens de variations)

**Exercice 2.3.** Monsieur X. se constitue un capital retraite en versant chaque année une somme sur un compte épargne. Les versements sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 100-€, le premier versement étant d'un montant de 1000-€. Si on note  $V_n$  le versement de la  $n$  – me année, la suite  $(V_n)$  ne commence qu'à partir de  $n = 1$ .

1. Donner  $V_1$  ;  $V_2$  ;  $V_3$  ;  $V_4$
2. Exprimer la suite  $V$  par récurrence
3. Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$
4. Au bout de 20 ans, quel sera la capital de monsieur X. ?

## 2.2 Somme de termes consécutifs

Travail de l'élève : (p 14)

Lors d'un stage de remise en forme de 14 jours, un coureur cycliste effectue 60 km le premier jour, puis augmente son parcours de 10 km chaque jour suivant.

On note  $u_n$  le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste au cours du  $n$  – me jour (ou a donc  $u_1 = 60$ ).

1. Expliquer pourquoi la suite  $u$  est arithmétique ; préciser sa raison.  
Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
2. (a) Calculer la somme des sept premiers termes de la suite ; en déduire le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la première semaine.  
(b) Calculer  $S_1 = 7 \times \frac{u_1 + u_7}{2}$ . Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la deuxième semaine.  
(b) Calculer  $S_2 = 7 \times \frac{u_8 + u_{14}}{2}$ . Que constate-t-on ?

**THÉORÈME 2.** On considère  $(u_n)$  une suite arithmétique.

Si  $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + \dots + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$  est une somme de termes consécutifs de cette suite, alors :

$$S = (\text{nombre de terme de S}) \times \frac{(\text{premier terme de S}) + (\text{dernier terme de S})}{2}$$

**Cas particuliers importants :**

**THÉORÈME 3.**

– Si le terme initial est  $u_1$ , alors  $\underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_n}_{n \text{ termes}} = n \frac{u_1 + u_n}{2}$

– Si le terme initial est  $u_0$ , alors  $\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

*Exemple :* Soit  $(u_n)$  la suite arithmétique de raison  $-5$  et de terme initial  $u_0 = 1$ .

Montrer que  $\underbrace{u_7 + u_8 + \dots + u_{17}}_{11 \text{ termes}} = -649$

**Exercices du livre :** 38 à 58 p 23

**Exercice 2.4.** Pour un prêt de 1500€, un organisme de crédit propose à un client un remboursement en sept annuités, qui sont les sept premiers termes de la suite arithmétique  $(u_n)$  de raison 50 et de terme initial  $u_1 = 100$

Calculer le montant total du remboursement.

**Exercice 2.5.** En 1998, un pays consommait 20 tonnes d'un produit. On note  $u_n$  le nombre de tonnes consommées en 1998 +  $n$  (par exemple,  $u_3$  est le nombre de tonnes consommées en 1998 + 3, soit en 2001). La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison 3 et de terme initial  $u_0 = 20$ .

Calculer le nombre total de tonnes de produit consommées par le pays de 1998 à 2004

**Exercice 2.6.** Un fabricant produit 200 objets la première année, puis augmente sa production de 25 objets par an.

On note  $u_n$  le nombre d'objets fabriqués la  $n$  – ième année. La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison 25 et de terme initial  $u_1 = 200$ .

Calculer le nombre d'objets fabriqués en dix ans.

**Exercice 2.7.** Marion verse 40-€ sur son livret d'épargne à l'ouverture de celui-ci, puis augmente son versement de 5-€ tous les mois.

On note  $u_n$  le  $n$ -ième versement effectué après l'ouverture. La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison 5 et de terme initial  $u_0 = 40$ .

Calculer la somme totale versée la première année.

### 3 Suites Géométriques

#### 3.1 Définition

**Définition 4.** Une suite  $u$  de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$  est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} = u_n \times q$

Autrement dit, une suite géométrique est une suite de nombres telle que chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison.

*Exemple :* Soit la suite  $u$  géométrique, de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $q = -2$ .

La définition de  $u$  par récurrence est  $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \dots \\ u_{n+1} = \dots \end{array} \right.$

Les premiers termes de cette suite sont  $u_1 = \dots, u_2 = \dots, u_3 = \dots, u_4 = \dots, u_5 = \dots, u_6 = \dots$

**Exercice 3.1.** Soit  $u$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 10$  et de raison  $q = 1,25$

1. Donner la définition par récurrence de la suite  $u$
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

**Méthodes :**

**Reconnaître une suite géométrique :**

Pour qu'une suite  $u$  soit géométrique, il faut et il suffit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les termes  $u_n$  soient non nuls et que le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  soit constant :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in \mathbb{R}^*$ . Le nombre  $q$  est alors la raison de la suite  $u$ .

*Exemple :* Par exemple, soit  $u$  définie par  $u_n = 2 \times 3^n$ .

On a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots$

Donc la suite  $u$  est géométrique, et sa raison est  $q = \dots$

Or  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$  donc la suite est croissante.

**Propriété 2. Relation entre deux termes d'une suite géométrique :**

Soit une suite géométrique  $u$ , de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ .

- **Relation entre  $u_n$  et  $u_0$  :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_0 \times q^n$
- **Relation entre  $u_n$  et  $u_p$  :** Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- **Relation entre  $u_n$  et  $u_1$  :** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

**Exercices du livre :** 15 + 17 + 18 + 20 + 21 + 24 p 20

**Exercice 3.2.** Par exemple, on peut obtenir la définition explicite d'une suite géométrique à partir de sa définition par récurrence :

Si  $u$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $q = -2$ ,

alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = \dots\dots\dots$

**Exercice 3.3.** Soit  $(u_n)_{n \geq 2}$  une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 25.

1. Donner  $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$
2. Exprimer la suite  $u$  par récurrence
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
4. Calculer  $u_{999}$  ?

**THÉORÈME 4.**  $u$  est une suite géométrique de raison  $q > 0$  et de terme initial  $u_0 > 0$  :

- Si  $0 < q < 1$ , la suite est décroissante : on dit que les termes de la suite sont en décroissance géométrique ou exponentielle.
- Si  $q > 1$ , la suite est croissante : on dit que les termes de la suite sont en croissance géométrique ou exponentielle.
- Si  $q = 1$ , la suite est constante

**Exercice 3.4.** Un nouvel article, dont le prix initial était de 250€, voit son prix baisser tous les mois de 10%. La suite  $u$  des prix mensuels de cet article est donc géométrique

1. Préciser sa raison et son premier terme
2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
3. Donner le sens de variation de la suite  $u$

### 3.2 Somme de termes consécutifs

*Travail de l'élève* : Avant les fêtes de fin d'année, sur une période de six jours, un chocolatier voit sa vente de ballotins doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.

On note  $u_n$  le nombre de ballotins vendus le  $n$  - ième jour (on a donc  $u_1 = 20$ ).

1. Expliquer pourquoi la suite  $(u_n)$  est géométrique ; préciser sa raison.

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

2. (a) Calculer la somme des six termes de cette suite ; en déduire le nombre total de ballotins vendus au cours de cette période.

(b) Calculer  $S_1 = 20 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2}$ . Que constate-t-on ?

3. (a) Calculer le nombre de ballotins vendus durant les trois dernier jours de cette période

(b) Calculer  $S_2 = u_4 \times \frac{1 - 2^3}{1 - 2}$ . Que constate-t-on ?

**THÉORÈME 5.** On considère  $(u_n)$  une suite géométrique, de raison  $q \neq 1$ .

Si  $S = \underbrace{u_k + u_{k+1} + \dots + u_p}_{\text{termes consécutifs}}$  est une somme de termes consécutifs de cette suite, alors :

$$S = (\text{premier terme de S}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de terme de S})}}{1 - (\text{raison})}$$

**Cas particuliers importants :**

**THÉORÈME 6.**

- Si le terme initial est  $u_1$ , alors  $\underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_n}_{n \text{ termes}} = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

- Si le terme initial est  $u_0$ , alors  $\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

*Exemple* : Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison 3 et de terme initial  $u_1 = 1$

Montrer que  $u_7 + u_8 + \dots + u_{17} = 64569717$

**Exercices du livre** : 59 à 78 p 25 + TP info

**Exercice 3.5.** Pour limiter ses stocks, un fabricant est amené à diminuer son activité : il décide que désormais, sa production mensuelle doit correspondre à une suite géométrique de raison 0,95 et de terme initial 200.

On note  $u_n$  le nombre d'objets fabriqués le  $n$  - ième mois après cette décision (ainsi,  $u_1 = 200$ )

Calculer le nombre total d'objets fabriqués au cours des sept premiers mois après la décision, arrondi à l'unité.

**Exercice 3.6.** Un propriétaire loue un appartement à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2000, pour 9 ans et pour montant annuel de 6000-€ en 2000, à condition que le locataire accepte une augmentation annuelle de 2%.

On note  $u_n$  le loyer payé en  $2000 + n$ . La suite  $(u_n)$  est donc géométrique, de raison 1,02 et de terme initial  $u_0 = 2000$

Calculer le montant total des loyers versés pendant les neuf années, arrondi à l'unité.

**Exercice 3.7.** Il est prévu que le salaire d'un employé augmente de 0,4% chaque mois, pendant 2 ans. Le premier mois, son salaire est de 1500-€. On note  $u_n$  le salaire perçu le  $n$  - ième mois. La suite  $(u_n)$  est donc géométrique, de raison 1,004 et de terme initial  $u_1 = 1500$

Calculer le montant total des salaires perçus sur les deux ans.

**Exercice 3.8.** En 2000, un automobiliste a eu une dépense annuelle d'essence de 1200-€. Il considère que depuis, elle augmente de 3% par an. On note  $u_n$  le montant de la facture en  $2000 + n$ . La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison 1,03 et de terme initial  $u_0 = 1200$ .

Calculer le montant total de sa dépenser d'essence, pour les six années de 2000 à 2005

## Les Annexes

## ACTIVITÉS : LES SUITES NUMÉRIQUES

### Travail de l'élève : Somme de termes consécutifs-Suites arithmétiques

Lors d'un stage de remise en forme de 14 jours, un coureur cycliste effectue 60 km le premier jour, puis augmente son parcours de 10 km chaque jour [section]suivant.

On note  $u_n$  le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste au cours du  $n - me$  jour (on a donc  $u_1 = 60$ ).

1. Expliquer pourquoi la suite  $u$  est arithmétique ; préciser sa raison.

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

2. (a) Calculer la somme des sept premiers termes de la suite ; en déduire le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la première semaine.  
(b) Calculer  $S_1 = 7 \times \frac{u_1 + u_7}{2}$ . Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de kilomètres parcourus par le cycliste durant la deuxième semaine.  
(b) Calculer  $S_2 = 7 \times \frac{u_8 + u_{14}}{2}$ . Que constate-t-on ?

### Travail de l'élève : Somme de termes consécutifs-Suites géométriques

Avant les fêtes de fin d'année, sur une période de six jours, un chocolatier voit sa vente de ballotins doubler chaque jour. Il en vend 20 le premier jour.

On note  $u_n$  le nombre de ballotins vendus le  $n - ième$  jour (on a donc  $u_1 = 20$ ).

1. Expliquer pourquoi la suite  $(u_n)$  est géométrique ; préciser sa raison.

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

2. (a) Calculer la somme des six termes de cette suite ; en déduire le nombre total de ballotins vendus au cours de cette période.  
(b) Calculer  $S_1 = 20 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2}$ . Que constate-t-on ?
3. (a) Calculer le nombre de ballotins vendus durant les trois derniers jours de cette période  
(b) Calculer  $S_2 = u_4 \times \frac{1 - 2^3}{1 - 2}$ . Que constate-t-on ?

### Travail de l'élève : Sens de variation et limite d'une suite géométrique "positive"

La population de la ville A et celle de la ville B étaient de 10000 habitants en 2000. Depuis, chaque année, celle de A augmente de 20% et celle de B diminue de 20%. On suppose que cela dure et on note respectivement  $p_n$  et  $q_n$  les populations de A et de B en  $2000 + n$ .

1. (a) Expliquer pourquoi la suite  $(p_n)$  est géométrique, de raison 1,2 et de terme initial  $p_0 = 10000$ , puis indiquer pourquoi cette suite est strictement croissante.  
(b) Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$  puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les années au cours desquelles la ville A verra sa population doubler, puis dépasser 1000000 !
2. (a) Expliquer pourquoi la suite  $(q_n)$  est géométrique, de raison 0,8 et de terme initial  $p_0 = 10000$ , puis indiquer pourquoi cette suite est strictement décroissante.  
(b) Exprimer  $q_n$  en fonction de  $n$  puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer les années au cours desquelles la ville A verra sa population diminuer de moitié, puis être inférieure à 10 !

**EXERCICES : LES SUITES NUMÉRIQUES**

**Exercice 1.1.** Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = 4n + 3$

1. Calculer  $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que  $(u_n)$  est croissante

**Exercice 1.2.** Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = -2n + 1$

1. Calculer  $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que  $(u_n)$  est décroissante

**Exercice 1.3.** Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

1. Calculer  $u_{n+1} - u_n$
2. En déduire que  $(u_n)$  est croissante

**Exercice 2.1.** Soit  $u$  la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison  $r = 3$

1. Donner la définition par récurrence de la suite  $u$
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

**Exercice 2.2.** Monsieur X. se constitue un capital retraite en versant chaque année une somme sur un compte épargne. Les versements sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 100€, le premier versement étant d'un montant de 1000€. Si on note  $V_n$  le versement de la  $n - me$  année, la suite  $(V_n)$  ne commence qu'à partir de  $n = 1$ .

1. Donner  $V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4$
2. Exprimer la suite  $V$  par récurrence
3. Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$
4. Au bout de 20 ans, quel sera la capital de monsieur X. ?

**Exercice 2.3.** Pour un prêt de 1500€, un organisme de crédit propose à un client un remboursement en sept annuités, qui sont les sept premiers termes de la suite arithmétique  $(u_n)$  de raison 50 et de terme initial  $u_1 = 100$

Calculer le montant total du remboursement.

**Exercice 2.4.** En 1998, un pays consommait 20 tonnes d'un produit. On note  $u_n$  le nombre de tonnes consommées en  $1998 + n$  (par exemple,  $u_3$  est le nombre de tonnes consommées en  $1998 + 3$ , soit en 2001). La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison 3 et de terme initial  $u_0 = 20$ .

Calculer le nombre total de tonnes de produit consommées par le pays de 1998 à 2004

**Exercice 2.5.** Un fabricant produit 200 objets la première année, puis augmente sa production de 25 objets par an.

On note  $u_n$  le nombre d'objets fabriqués la  $n$  – ième année. La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison 25 et de terme initial  $u_1 = 200$ .

Calculer le nombre d'objets fabriqués en dix ans.

**Exercice 2.6.** Marion verse 40€ sur son livret d'épargne à l'ouverture de celui-ci, puis augmente son versement de 5€ tous les mois.

On note  $u_n$  le  $n$  – ième versement effectué après l'ouverture. La suite  $(u_n)$  est arithmétique, de raison 5 et de terme initial  $u_0 = 40$ .

Calculer la somme totale versée la première année.

**Exercice 3.1.** Soit  $u$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 10$  et de raison  $q = 1,25$

1. Donner la définition par récurrence de la suite  $u$
2. Calculer les 6 premiers termes
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$

**Exercice 3.2.** Par exemple, on peut obtenir la définition explicite d'une suite géométrique à partir de sa définition par récurrence :

Si  $u$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $q = -2$ ,

alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = \dots\dots\dots$

**Exercice 3.3.** Soit  $(u_n)_{n \geq 2}$  une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 25.

1. Donner  $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$
2. Exprimer la suite  $u$  par récurrence
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
4. Calculer  $u_{999}$  ?

**Exercice 3.4.** Pour limiter ses stocks, un fabricant est amené à diminuer son activité : il décide que désormais, sa production mensuelle doit correspondre à une suite géométrique de raison 0,95 et de terme initial 200.

On note  $u_n$  le nombre d'objets fabriqués le  $n$  – ième mois après cette décision (ainsi,  $u_1 = 200$ )

Calculer le nombre total d'objets fabriqués au cours des sept premiers mois après la décision, arrondi à l'unité.

**Exercice 3.5.** Un propriétaire loue un appartement à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2000, pour 9 ans et pour montant annuel de 6000€ en 2000, à condition que le locataire accepte une augmentation annuelle de 2%.

On note  $u_n$  le loyer payé en  $2000 + n$ . La suite  $(u_n)$  est donc géométrique, de raison 1,02 et de terme initial  $u_0 = 2000$

Calculer le montant total des loyers versés pendant les neuf années, arrondi à l'unité.

**Exercice 3.6.** Il est prévu que le salaire d'un employé augmente de 0,4% chaque mois, pendant 2 ans. Le premier mois, son salaire est de 1500€. On note  $u_n$  le salaire perçu le  $n$  – ième mois. La suite  $(u_n)$  est donc géométrique, de raison 1,004 et de terme initial  $u_1 = 1500$   
Calculer le montant total des salaires perçus sur les deux ans.

**Exercice 3.7.** En 2000, un automobiliste a eu une dépense annuelle d'essence de 1200€. Il considère que depuis, elle augmente de 3% par an. On note  $u_n$  le montant de la facture en 2000 +  $n$ . La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison 1,03 et de terme initial  $u_0 = 1200$ .  
Calculer le montant total de sa dépenser d'essence, pour les six années de 2000 à 2005

**Exercice 4.1.** Un nouvel article, dont le prix initial était de 250€, voit son prix baisser tous les mois de 10%. La suite  $u$  des prix mensuels de cet article est donc géométrique

1. Préciser sa raison et son premier terme
2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
3. Donner le sens de variation de la suite  $u$

## TP INFORMATIQUE : UN EMPRUNT À ANNUITÉS CONSTANTES

### Observons un tableau d'amortissement

Nathanael a emprunté 50000€ pour acheter un studio. La banque lui a prêté cette somme au taux annuel de 5% sur une période de 10 ans. Nathanael a choisi un remboursement à annuités constantes. Le remboursement d'un prêt est à annuités constantes lorsque tous les montants annuels de remboursements sont identiques.

On appelle amortissements du capital les parts du capital remboursées chaque année.

Le montant des échéances correspond au montant de l'annuité. Chaque annuité est la somme des intérêts dus sur le capital restant à rembourser et d'une part de remboursement du capital. La banque lui a envoyé le tableau d'amortissement de son emprunt sur 10 ans.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Montant du prêt	50000€					
2	Durée du prêt	10 ans					
3	Taux du prêt	5%					
4	Montant des annuités	6475,23€					
5							
6		Echéance	Capital restant dû avant l'échéance	Amortissement du capital	Intérêts	Annuité	Capital restant dû après échéance
7		1	50000€	3975,23€	2500,00€	6475,23 €	46 024,77 €
8		2	46024,77€	4173,99€	2301,24€	6475,23 €	41 850,78 €
9		3	41 850,78 €	4382,69€	2092,54€	6475,23 €	37468,09 €
10		4	37468,09 €	4601,82€	1873,40€	6475,23 €	32866,27 €
11		5	32866,27 €	4831,92€	1643,31€	6475,23 €	28034,35 €
12		6	28034,35 €	5073,51€	1401,72€	6475,23 €	22960,84 €
13		7	22960,84 €	5327,19€	1148,04€	6475,23 €	17633,65 €
14		8	17633,65 €	5593,55€	881,68€	6475,23 €	12040,11 €
15		9	12040,11 €	5873,22€	602,01€	6475,23 €	6166,88 €
16		10	6166,88 €	6166,88€	308,34€	6475,23 €	0,00 €

1. Vérifier que, pour chaque année, le montant des échéances correspond à la somme des intérêts et de l'amortissement du capital
2. Vérifier que, pour chaque échéance, les intérêts représentent bien 5% des montants du capital restant dû
3. On appelle  $A$  la suite des amortissements du capital. Montrer que  $A$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

### Construisons un tableau d'amortissement

Magalie a emprunté 10000-€ au taux annuel de 4,5%. Elle a choisi un remboursement à annuités constantes de 1800-€ pendant 6 ans et le solde à la fin de la septième année. Reproduire un tableau, similaire à celui de la première partie, adapté au cas de Magalie.

1. Calculer le montant des intérêts dus à la fin de la première année et en déduire l'amortissement de l'année. En déduire les formules qu'il faut entrer dans les cellules C7, E7 et F7.
2. Compléter ensuite le tableau pour les six premières années.
3. En déduire le montant restant à rembourser à la fin de la septième année.

### Reconstituons un tableau d'amortissement

Le tableau d'amortissement de l'emprunt de Sofiane a été partiellement effacé. Voici ce qu'il en reste. Reconstituons ce tableau d'amortissement en utilisant les résultats obtenus dans les parties 1 et 2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Montant du prêt						
2	Durée du prêt	5 ans					
3	Taux du prêt	=					
4	Montant des annuités						
5							
6		Echéance	Capital restant dû avant l'échéance	Amortissement du capital	Intérêts	Annuité	Capital restant dû après échéance
7		1					
8		2					
9		3					
10		4					
11		5		3389,22 €	220,30 €		

1. En utilisant les deux données restantes, déterminer le taux annuel du prêt.
2. Calculer ensuite le montant de l'échéance. Expliquer pourquoi la formule tapée dans la cellule G11 est : « =E\$11+F\$11 »
3. Quel est le nombre qui devrait figurer en H11 ?
4. Comment calcule-t-on le capital avant échéance ? En déduire la formule de la cellule D13 ?
5. Compléter le tableau
6. Préciser le montant de la somme empruntée par Sofiane.