Correction DM 2

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. (2 points)

1. Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3, 6 et leurs opposés. Donc les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise 6 sont les entiers relatifs différents de 4 tels que

$$\begin{aligned}
& n-4=-6 \quad ou \quad n-4=-3 \quad ou \quad n-4=-2 \quad ou \quad n-4=-1 \\
& ou \quad n-4=1 \quad ou \quad n-4=2 \quad ,ou \quad n-4=3 \quad ou \quad n-4=6 \\
\iff \quad & n=-2 \quad ou \quad n=1 \quad ou \quad n=2 \quad ou \quad n=3 \quad ou \quad n=5 \quad ou \quad n=6 \quad ou \quad n=7 \quad ou \quad n=10
\end{aligned}$$

2. $3n+4=3(n+1)-7$. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ tel que $n+1$ divise $3n-4$. On a aussi $n+1$ divise $n+1$ donc $n+1$ divise toutes combinaisons linéaires de $3n-4$ et de $n+1$, par exemple $n+1$ divise 7. Les diviseurs de 7 sont 1, 7 et leurs opposés. Donc sont les entiers relatifs n tels que $n+1$ divisent $3n-4$ sont les entiers relatifs tels que :

$$\begin{aligned}
& n+1=-7 \quad ou \quad n+1=-1 \quad ou \quad n+1=1 \quad ou \quad n+1=7 \\
\iff \quad & n=-8 \quad ou \quad n=-2 \quad ou \quad n=0 \quad ou \quad n=6
\end{aligned}$$

Exercice 2. (1 point)
$-753 = 108 \times (-7) + 3$.

Exercice 3. La division euclidienne par 7 *(Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)* (7 points)

1. $1991 \equiv 3\,[7] \implies 1991 \equiv 3^{2009}\,[7]$ Cherchons les valeurs des puissances de 3 modulo 7.

3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
3	2	6	4	5	1

Donc on a :

$$\begin{aligned}
1991 \equiv 3\,[7] \quad & \implies \quad 1991 \equiv 3^{2009}\,[7] \\
& \iff \quad 1991 \equiv 3^{334\times 6+5}\,[7] \\
& \iff \quad 1991 \equiv (3^6)^{334} \times 3^5\,[7] \\
& \iff \quad 1991 \equiv (1)^{334} \times 3^5\,[7] \\
& \iff \quad 1991 \equiv 3^5\,[7] \\
& \iff \quad 1991 \equiv 5\,[7]
\end{aligned}$$

2. Soient x et y des entiers naturels.

   (a) Si $x \equiv 0\,[7]$ alors $x^2 \equiv 0\,[7]$
   Si $x \equiv 1\,[7]$ alors $x^2 \equiv 1\,[7]$
   Si $x \equiv 2\,[7]$ alors $x^2 \equiv 4\,[7]$
   Si $x \equiv 3\,[7]$ alors $x^2 \equiv 2\,[7]$
   Si $x \equiv 4\,[7]$ alors $x^2 \equiv 2\,[7]$
   Si $x \equiv 5\,[7]$ alors $x^2 \equiv 4\,[7]$
   Si $x \equiv 6\,[7]$ alors $x^2 \equiv 1\,[7]$

On a traité tous les cas. Donc les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 sont 0, 1, 2, et 4.

(b) Si 7 divise x^2+y^2 alors :
$x^2+y^2 \equiv 0\,[7]$. Or la seule possibilité pour avoir cela est $x^2 \equiv 0\,[7]$ et $y^2 \equiv 0\,[7]$ (les autres possiblités ne donne jamais $0\,[7]$, on peut faire un tableau 2×2 pour le voir).
Donc $7|x^2$ et $7|y^2$. Or on a étudié tous les cas, et le seul cas où $x^2 \equiv 0\,[7]$ est celui où $x \equiv 0\,[7]$.
De même on a $y \equiv 0\,[7]$.
Donc $7|x$ et $7|y$.

Si 7 divise x et 7 divise y alors on a vu que $7|x^2$ et $7|y^2$ donc 7 divise leur somme x^2+y^2.

3. Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a\times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   (a) $10^3 = 7\times 142 + 6$ Donc $10^3 \equiv 6\,[7]$ ou encore $10^3 \equiv -1\,[7]$
   (b) $N = a\times 10^3 + b$ Donc $N \equiv -a+b\,[7]$
   On cherche les nombres N tels que $N \equiv 0\,[7]$, donc les nombres a et b tels que :
   $$-a+b \equiv 0\,[7] \Longleftrightarrow a \equiv b\,[7]$$
   Les solutions possibles sont évidents tous les cas où $a=b$ mais aussi les cas où $a=1$ et $b=8$, $a=2$ et $b=9$ ainsi que $b=0$ $a=7$, $b=1$ et $a=8$, $b=2$ et $a=9$. L'ensembles des nombres N est cherchés est alors
   $$\{1001\,;\,2002\,;\,3003\,;\,4004\,;\,5005\,;\,6006\,;\,7007\,;\,8008\,;\,9009\,;\,1008\,;\,2009\,;\,7000\,;\,8001\,;\,9002\}$$

Exercice 4. p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2-2q^2=1$. (2 points)

1. $p^2 = 1+2q^2$ donc p^2 est impair.
Or si p était pair alors il serait de la forme $p=2k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et donc $p^2=4k^2$. Donc p^2 serait pair aussi. Ce n'est pas le cas, l'hypothèse p pair est absurde. Forcément p est impair.
2. On a $2q^2 = p^2-1$. Comme p est impair, il est de la forme $p=2k+1$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Donc $p^2 = 4k^2+4k+1$ (impair) et $2q^2 = 4k^2+4k \Longleftrightarrow q^2 = 2k^2+2k$. Donc q^2 est pair.
Or on vient de voir que le carré d'un nombre impair était impair. Par conséquent, q ne peut pas être impair : q est pair.

Exercice 5. (8 points)

Partie A : Soit $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
Déterminer les couples $\{a;b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de $a\times b$ par 11 soit 1.
On peut par exemple faire un tableau des restes de la division euclidienne de $a\times b$ par 11. Comme $a\neq b$, et par commutativité du produit, il suffit de remplir que la moitié du tableau, sans la diagonale :

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	6	7	8	9
2			6	8	10	1	3	5	7
3				1	4	7	10	3	5
4					9	3	6	10	3
5						8	3	7	1
6							10	4	10
7								1	8
8									6

On constate que les couples $\{a; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de $a \times b$ par 11 soit 1 sont ceux de l'ensemble $\{(6,2); (2,6); (3,4); (4,3); (5,9); (9,5); (7,8); (8,7)\}$ **Partie B** :

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3
   (a) Comme $n \geq 3$ on a $n-1 \geq 2$ donc $(n-1)!$ est pair et $(n-1)!+1$ est impair .
   (b) Par conséquent, l'entier $(n-1)!+1$ n'est pas divisible par un entier naturel pair.
2. Comme $3 \times 5 = 15$ on a $15|14!$, ie $15|(15-1)! \Longleftrightarrow (15-1)! \equiv 0\,[15] \Longleftrightarrow (15-1)!+1 \equiv 1\,[15]$ Donc $(15-1)!+1$ n'est pas divisble par 15.
3. 11 est un nombre premier donc on ne peut pas appliquer la même méthode (11 ne divise pas 10!). Par contre on sait que :

$$\begin{aligned}(11-1)! &\equiv 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times (-5) \times (-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)\,[11] \\ &\equiv -(2 \times 5)^2 \times (3 \times 4)^2 \qquad [11] \\ &\equiv -(-1)^2 \times (1)^2 \qquad [11] \\ &\equiv -1 \qquad [11]\end{aligned}$$

Donc $(11-1)!+1 \equiv 0\,[11]$, ie l'entier $(11-1)!+1$ est divisible par 11.

Partie C : Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

1. p n'est pas premier donc il admet un diviseur q tel que $1 < q < p \Longleftrightarrow 2 \leq q \leq p-1$. Donc q divise $(p-1)!$
2. Si q divise aussi l'entier $(p-1)!+1$ alors il divise la différence $(p-1)!+1-(p-1)! = 1$. Or $q \neq 1$ donc c'est impossible. q ne divise pas $(p-1)!+1$
3. Si p divise l'entier $(p-1)!+1$ alors q aussi. Or q ne divise pas $(p-1)!+1$ donc p non plus.
   Remarque : dans la partie C on retrouve alors le fait que 15 *ne divise pas* $(15-1)!+1$