Devoir maison 4

Exercice 1. (10 points)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2\,009\,[10\,000]$.

Partie A :

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2 - 1$ par 16.
2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009\,[16]$.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

1. (a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
   (b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$$
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.
2. (a) Vérifier que : $u_3 = 2\,009^{250} - 1$. Puis en déduire que : $2\,009^{250} \equiv 1\,[625]$
   (b) Démontrer alors que $2\,009^{8001} \equiv 2\,009\,[625]$

Partie C :

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédents, montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisble par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

Exercice 2. (10 points)

1. On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme :
   $$(141 + 226k; 68 + 109k), \text{ où } k \text{ appartient à } \mathbb{Z}.$$
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e).
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.
   On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
   à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227,
   à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227,
   (a) Vérifier que $g\,(f(0)) = 0$.
   (b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1\,[227]$.
   (c) En utilisant 1.b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g\,(f(a)) = a$. Que peut-on dire de $f\,(g(a)) = a$?