# Correction DM 3

**Exercice 1.** (8 points)

1. Comme $S$ est une similitude directe, on a le système suivant d'inconnue $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ à résoudre :

$$\begin{cases} z_A = az_O + b \\ z_B = az_A + b \end{cases} \iff \begin{cases} i = a \times 0 + b \\ 1 + 2i = ai + b \end{cases} \iff \begin{cases} b = i \\ 1 + i = ai \end{cases} \iff \begin{cases} b = i \\ a = 1 - i \end{cases}$$

   D'où $S$ admet pour écriture complexe $z' = (1-i)z + i$.

2. On cherche $z$ tel que $z = (1-i)z + i \iff iz = i \iff z = 1$
   Donc le centre de $S$ est le point $\Omega$ d'affixe $\omega = 1$.
   De plus on a $|a| = |1-i| = \sqrt{2}$
   Et $\arg(a) = \arg(1-i) = \arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \arg(\sqrt{2}) + \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

3. (a) On fait une récurrence pour démontrer pour tout $n\mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n : z_n = 1 - (1-i)^n$ .
   *Initialisation* : On a $z_0 = z_{A_0} = z_O = 0$
   Et on a $1 - (1-i)^0 = 1 - 1 = 0$.
   Donc $z_0 = 1 - (1-i)^0$. La propriété est vraie au rang 0.
   *Hérédité* : Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que $\mathscr{P}_k : z_k = 1 - (1-i)^k$ soit vraie.
   Montrons que $\mathscr{P}_{k+1} : z_{k+1} = 1 - (1-i)^{k+1}$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (1-i)z_k + i \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= (1-i)\left(1 - (1-i)^k\right) + i \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (1-i) - (1-i)^{k+1} + i \\ &= 1 - (1-i)^{k+1} \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie. La propriété est héréditaire.
   Finalement la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b)

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} &= z_{A_n} - z_\Omega = 1 - (1-i)^n - 1 = -(1-i)^n \\ z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}} &= z_{A_{n+1}} - z_{A_n} = 1 - (1-i)^{n+1} - (1 - (1-i)^n) \\ &= (1-i)^n - (1-i)^{n+1} = (1-i)^n(1 - (1-i)) \\ &= i(1-i)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{\Omega A_n}|| &= |-(1-i)^n| = |(1-i)^n| \\ ||\overrightarrow{A_nA_{n+1}}|| &= |i(1-i)^n| = |i||(1-i)^n| = |(1-i)^n| \\ \text{Donc} \quad ||\overrightarrow{A_nA_{n+1}}|| &= ||\overrightarrow{\Omega A_n}|| \end{aligned}$$

   Donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_nA_{n+1}})$ est :

$$(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg\left(\frac{i(1-i)^n}{-(1-i)^n}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

(c) On a $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = -(\overrightarrow{A_n\Omega};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2}$
Et $A_nA_{n+1} = \Omega A_n$.
Donc, on fait une rotation de centre $A_n$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ du point $\Omega$.
Avec cette méhtode on trouve que $z_{A_3} = 3+2i$ et $z_{A_4} = 5$.

4. Les points de la suite $(A_n)$ appartenant à la droite $(\Omega B)$ sont ceux tels que $n \equiv 2\,[4]$.
En effet, on cherche les points $A_n$ tels que $\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega A_n}\right) \equiv 0\,[\pi]$.
Autrement dit les points $A_n$ tels que :

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{(1-i)^n}{2i}\right) \equiv 0\,[\pi] &\iff n\arg(1-i) - arg(2i) \equiv 0\,[\pi] \\
&\iff -n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \equiv 0\,[\pi] \\
&\iff n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \equiv 0\,[\pi] \\
&\overset{\times 4}{\iff} n\pi + 2\pi \equiv 0\,[4\pi] \\
&\iff n+2 \equiv 0\,[4] \\
&\iff n \equiv -2\,[4] \\
&\iff n \equiv 2\,[4]
\end{aligned}$$

*La multiplication d'une égalité en modulo n'a pas encore été vue en cours. Elle se passe ici ainsi car 4 est premier avec $\pi$.*
*Toutefois ici, il suffisait, une fois l'équation établie, de regarder au cas par cas la condition à remplir pour $n$.*

**<u>Exercice</u> 2.** n°9 p 120 (4 points)

1. $z = 2\alpha z + 1 - i$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ est l'écriture complexe d'une translation si et seulement si elle est de la forme $z' = z + b$ (avec $b \in \mathbb{C}$), ce qui équivaut à $\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 1-i = b \end{cases}$
La seule valeur possible est $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
*Dans ce cas, il s'agit de la translation de vecteur $\vec{u}(1-i)$.*

2. $z = 2\alpha z + 1 - i$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ est l'écriture complexe d'une rotation si et seulement si elle est de la forme $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$), ce qui équivaut à $\iff \begin{cases} 2\alpha = e^{i\theta} \\ 1-i = w\left(1-e^{i\theta}\right) \end{cases}$
Les valeurs possibles sont $\alpha = \dfrac{e^{i\theta}}{2}$, avec $\theta \in \mathbb{R} - \{2k\pi\}$, $k \in \mathbb{R}$
($\theta \equiv 0\,[2\pi]$ est impossible d'après la deuxième équation).
*Dans ce cas, il s'agit de la rotation d'angle $\theta$ et de centre $\omega$, qui est totalement défini par la deuxième condition (et $\omega \neq 0$).*

3. $z = 2\alpha z + 1 - i$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ est l'écriture complexe d'une homothétie de rapport 4 si et seulement si elle est de la forme $z' = 4(z-\omega)+\omega$ (avec $\omega \in \mathbb{C}$), ce qui équivaut à $\iff \begin{cases} 2\alpha = 4 \\ 1-i = w\,(1-4) \end{cases}$
La seule valeur possible est $\alpha = 2$.

*Dans ce cas, il s'agit de l'homothétie de rapport 4 et de centre* $\omega = \dfrac{-1+i}{3}$.

4. Une symétrie centrale est une rotation d'angle $\pi$ (modulo $2\pi$). Il s'agit d'un cas particulier de la question $b$.
   Donc on trouve que la seule valeur possible est $\alpha = \dfrac{e^{i\pi}}{2} = -\dfrac{1}{2}$.
   *Dans ce cas, il s'agit de la symétrie de centre* $\omega = \dfrac{1-i}{2}$.

**<u>Exercice</u> 3.** n°13 p 121 (4 points)

1. L'écriture complexe de $s$ est du type $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
   De plus on sait que les points $A$ et $B$ sont fixes par la réflexion d'axe $(AB)$. D'où le système à résoudre :
   $$\begin{cases} 1+i = a(1-i)+b \\ 3-i = a(3+i)+b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -i \\ b = 2+2i \end{cases}$$
   D'où $s : z \mapsto -i\overline{z} + 2 + 2i$.
2. On procède de même, avec les points $O$ et $A$ fixes par $s'$ et on trouve :
   $$\begin{cases} 1+i = a(1-i)+b \\ 0 = a \times 0 + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = i \\ b = 0 \end{cases}$$
   D'où $s' : z \mapsto i\overline{z}$.
3. $s' \circ s(z) = i\overline{(-i\overline{z} + 2 + 2i)} = i\,(iz + 2 - 2i) = -z + 2 + 2i$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
   Il s'agit de l'écriture complexe d'une symétrie centrale.
   En effet, on a $|-1| = 1$ et $\arg(-1) = \pi\ [2\pi]$.
   De plus on cherche son centre $\omega$ tel que $\omega = -\omega + 2 + 2i \iff \omega = 1 + i$ .
   $s' \circ s$ est la symétrie de centre $A$.

**<u>Exercice</u> 4.** n°18 p 121 (4 points)

1. On a $|-1| = 1$ donc $\sigma$ est une isométrie.
   Son écriture complexe montre qu'il s'agit d'une similitude indirecte, donc pas d'une translation.
   Enfin, cherchons un éventuel point fixe d'affixe $\omega = a + ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :
   $$\omega = -\overline{\omega} + 2 + i \iff a + ib = -(a - ib) + 2 + i \iff 2a = 2 + i$$
   Or $a \in \mathbb{R}$ donc ceci est impossible et $\sigma$ n'a pas de point fixe.
2. Cherchons l'écriture complexe de $s$. On sait qu'elle est du type $z' = a\overline{z} + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) et que les points d'affixe 1 et $1+i$ sont fixes par $s$. D'où le système :
   $$\begin{cases} 1+i = a(1-i)+b \\ 1 = a \times 1 + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$
   Donc $s : z \mapsto -\overline{z} + 2$.
   Alors $s \circ t(z) = -\overline{(z+i)} + 2 = -\overline{z} + i + 2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'où $s \circ t = \sigma$.
3. $t \circ s(z) = -\overline{z} + 2 + i$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'où $t \circ s = s \circ t = \sigma$.