Chapitre 5 : Sections Planes de Surfaces

C. Aupérin D. Zancanaro

2009-2010

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »Thurston Moore

Dernière modification : 26 avril 2010

Table des matières

Cours : Sections Planes de Surfaces

Sauf indication contraire, dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace.

1 Equations d'objets dans l'espace

1.1 Révisions : droites, plans et cercles

On se place dans un repère orthonormal de l'espace $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. $\mathscr{P}$ est le plan parallèle à (yOz) et passant par le point $A(-2;1;3)$. Parmi ces équations, laquelle est une équation de $\mathscr{P}$

   (a) $z=3$ (b) $y=1$ (c) $x=-2$ (d) $x-2=0$

2. $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $y=5$. Quelle est la nature de $\mathscr{E}$?

   (a) Une droite parallèle à l'axe des abscisses (b) Un plan parallèle à (xOy) (c) Un plan parallèle à (yOz) (d) Un plan parallèle à (xOz)

3. $\mathscr{R}$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}(-1;0;3)$ et passant par le point $A(2;3;1)$. Parmi ces équations, laquelle est une équation de $\mathscr{R}$?

   (a) $-x+3y=7$ (b) $-y+3z=0$ (c) $-x+3z=0$ (d) $-x+3z=1$

4. $ABCDEFGH$ est un cube. Quel est le système d'équations de la droite (DB) dans le repère $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$?

   (a) $\begin{cases} z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$

5. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(2;-4;5)$ et de rayon 2, situé dans le plan d'équation $z=5$. Dans le repère $(I;\vec{i}\vec{j})$, parmi les équations suivantes, laquelle est une équation de $\mathscr{C}$?

   (a) $x^2+y^2+z^2=4$ (c) $(x-2)^2+(y+4)^2=4$

   (b) $x^2+y^2=2$ (d) $x^2+y^2=4$

1.2 Fonctions de deux variables et surfaces

Définition 1 :

Définir une fonction f à deux variables sur un ensemble $E = I \times J$, c'est associer à chaque couple $(x; y) \in I \times J$ au plus un élément noté $f(x; y)$.

Exemples :

– Le chemin le plus court pour aller d'un point A vers un point B

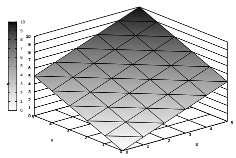
$$\begin{array}{rccl} \textit{chemin} : & (\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots) & \longrightarrow & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\ldots\ldots,\ldots\ldots) & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

– La fonction $\mathscr{A}$ qui à deux réels positifs l et L associe l'aire du rectangle de dimensions l et L

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{A} : & (\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots) & \longrightarrow & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\ldots\ldots,\ldots\ldots) & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

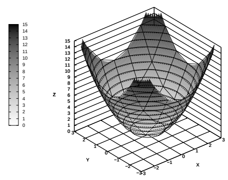
– La fonction r qui à tous entiers naturels n et m associe leur somme

$$\begin{array}{rccl} r : & \ldots\ldots & \longrightarrow & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\ldots\ldots,\ldots\ldots) & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$



– La fonction g qui à deux nombres réels x et y associe la somme de leur carré $x^2 + y^2$

$$\begin{array}{rccl} g : & (\ldots\ldots,\ldots\ldots) & \longrightarrow & \ldots\ldots \\ & (\ldots\ldots,\ldots\ldots) & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$



Calculer $g(0,3)$ et $g(-1; -2)$.

Remarques :

– Ce type de fonction s'étudie sur le même principe que les fonctions à une variables. Cela peut vite devenir compliqué. Cependant, cette année nous nous contenterons de les découvrir géométriquement, et de façon relativement intuitive.

– En gagnant une variable, la représentation graphique gagne une dimension pour devenir une surface.

Définition 2 :

Soit f une fonction à deux variables définie sur un ensemble $I \times J$.

Dans un repère de l'espace, la représentation graphique de f est l'ensemble Σ des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x \in I \\ y \in J \\ z = f(x; y) \end{cases}$$

On dit que Σ est la surface d'équation $z = f(x; y)$.

Remarque : Dans le plan, toute courbe n'est pas représentative d'une fonction à une variable (type $y = f(x)$), comme le cercle ou une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
De même, dans l'espace toute surface n'est pas représentative d'une fonction à deux variables, comme la sphère ou un plan parallèle à l'axe des côtes. Effectivement, un couple de l'ensemble de départ possède au plus une image.
Cela signifie géométriquement, que toute droite parallèle à l'axe (Oz) doit couper la surface en au plus un point.

1.3 Les surfaces de révolution

Les surfaces de révolution sont celles définies par un axe et la rotation d'une génératrice autour de cet axe.

Définition 3 : *Le cylindre illimité*

Le cylindre illimité d'axe (Oz) et de rayon r est l'ensemble des points situés à une distance r de l'axe (Oz).

Remarque : Chacune des droites parallèles à (Oz) et passant par un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon r du plan (xOy) est une génératrice du cylindre.

Proposition 1 :

Le cylindre illimité d'axe (Oz) et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2+y^2 = r^2$.

***Preuve* :**

$M(x; y; z)$ appartient au cylindre considéré signifie qu'il est à une distance r de l'axe (Oz). Ceci équivaut à dire (dans un repère orthonormal) que son projeté orthogonal $H(x; y; 0)$ sur le plan (xOy) appartient à $\mathscr{C}$, d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ dans le plan (xOy).
D'où $M(x; y; z)$ appartient au cylindre d'axe (Oz) et de rayon r si et seulement si $x^2 + y^2 = r^2$.

Exercices du livre *: n°1 + 3 + 18 p 148*

Définition 4 : *Le cône illimité*

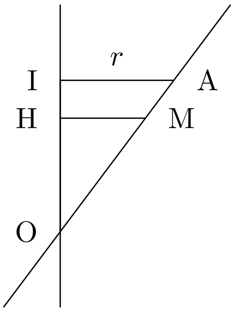
Soit $I \in (Oz)$ et $\mathscr{C}$ un cercle de centre I dans le plan parallèle à (xOy) contenant I.
Le cône illimité d'axe (Oz), de sommet O et de cercle directeur $\mathscr{C}$ est la surface engendrée par les droites passant par O et par un point de $\mathscr{C}$.

Remarque : Chacune de ces droites est une génératrice du cône.

Proposition 2 :

Le cône illimité d'axe (Oz) et de sommet O est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et dépend du cercle directeur.

***Preuve* :**
On appelle r le rayon du cercle $\mathscr{C}$, et l la distance OI (donc la valeur absolue de la côte du point I).
Soit $H(0;0;z)$ le projeté orthogonal de $M(x;y;z)$ sur (Oz). Alors $OH = |z|$.
On se place dans le plan contenant M et l'axe (Oz).



D'après le théorème de Thalès on a que $M(x;y;z)$ appartient au cône considéré ssi

$$\begin{aligned}\frac{MH}{IA} = \frac{OH}{OI} &\iff \frac{MH}{r} = \frac{|z|}{l}\\ &\iff MH = \frac{r}{l} \times |z|\\ &\iff MH^2 = \left(\frac{r}{l}\right)^2 \times z^2\end{aligned}$$

Or $MH^2 = x^2 + y^2$.

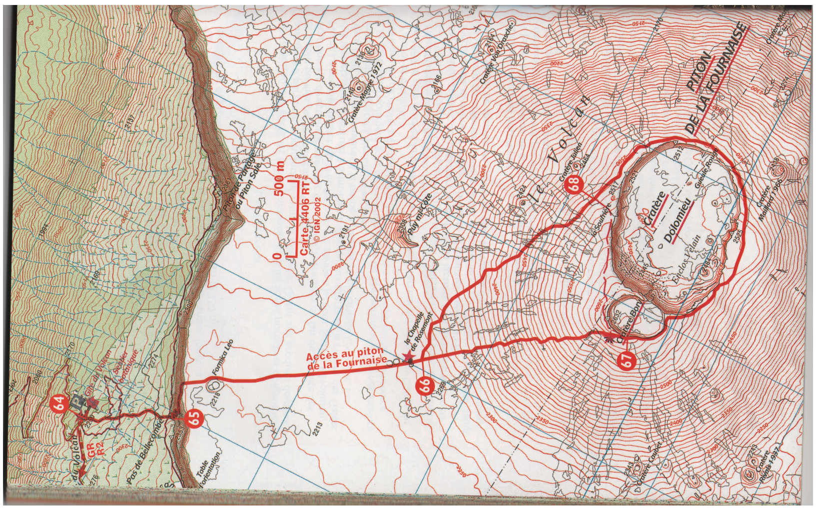
Finalement on a $M(x;y;z)$ appartient au cône illimité d'axe (Oz) et de sommet O si et seulement si $x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{l}\right)^2 \times z^2$, où r est le rayon d'un cercle directeur, et l la distance entre le centre de ce cercle et l'origine du repère.

Exercices du livre *: n°2 + 4 + 9 p 148*

2 Exemples basiques de section d'une surface par un plan

2.1 Ligne de niveaux

(Activité 1 p 134)



Sur les cartes topographiques IGN, chaque point peut-être repéré par sa longitude, sa latitude et son altitude par rapport au niveau de la mer.
Les points de même altitude sont reliés entre eux et forment une courbe de niveau. Celles-ci sont obtenues plus exactement ainsi :

– En découpant une zone géographique par des plans horizontaux équidistants (souvent tous les 20 m)
– En projetant les intersections sur un plan de référence de façon à obtenir une carte.

Remarques :

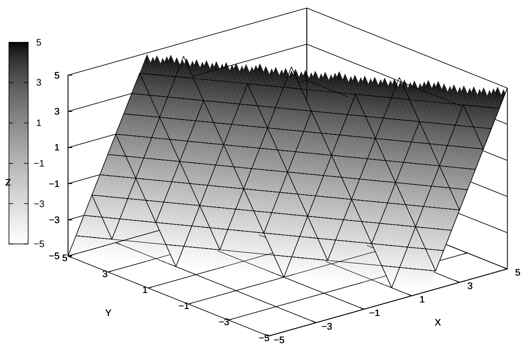
– Le contour extérieur d'une île est la ligne de niveau 0.
– Des lignes serrées traduisent une forte pente (en montée ou en descente).
– Pour faciliter la suite du chapitre, on pourra voir les plans comme des droites mises les unes à côté des autres (à la façon d'un radeau) et les surfaces commes des lignes de niveaux mises côte à côte.

Définition 5 :
Pour tout réel λ, la section de la surface représentative d'une fonction f à deux variables par le plan d'équation $z = \lambda$ s'appelle la ligne (ou courbe) de niveau λ de f.

2.2 Section de plan

Soit la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = 3x + 2y$ dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

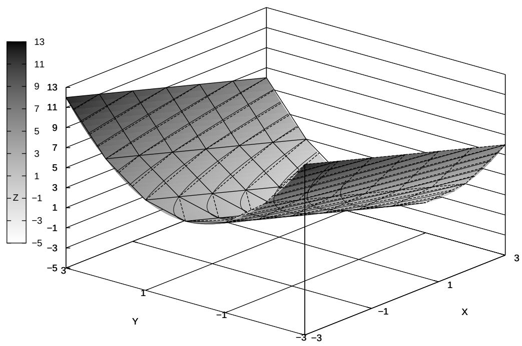
1. Quelle est la nature de $\mathscr{S}$?
2. Quelle est la nature de l'intersection $\mathscr{E}$ de $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{R}$ d'équation $z = 2$?
3. Caractériser $\mathscr{E}$.
4. Caractériser $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{R}$ muni du repère $(I;\vec{i},\vec{j})$ où I est le point de coordonnées $(0;0;2)$.
5. Mêmes questions que précédemment pour les plans d'équation $z = 1$ et $z = 0$.
6. Mêmes questions que précédemment pour les plans d'équation $y = 0$ et $x = 0$ dans des repères appropriés.



2.3 Autres exemples de section

Soit la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = y^2 - x$ dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Déterminer et donner la nature de la section de $\mathscr{S}$ par :

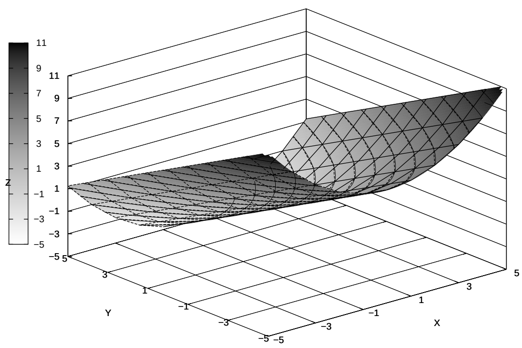
– Le plan (yOz) (la représenter)
– Le plan d'équation $x = 1$ (la représenter)
– Les plans $(x0z)$ et (xOy)



Soit la surface $\mathscr{F}$ représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $z = \dfrac{x^2}{4} - y$ dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Déterminer et donner la nature de la section de $\mathscr{F}$ par :

- Le plan d'équation $y = 1$
- Le plan d'équation $x = 2$



Exercice 1 :

Centre étranger Juin 2009 (Exercice 2) **5 points**

1. On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

   (a) Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

   (b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

   (c) Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées

   L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 29$.

   (a) Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.

   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   (c) Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.

   (d) Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. étude d'une surface

   $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

   Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathcal{S}$ avec certains plans de l'espace.

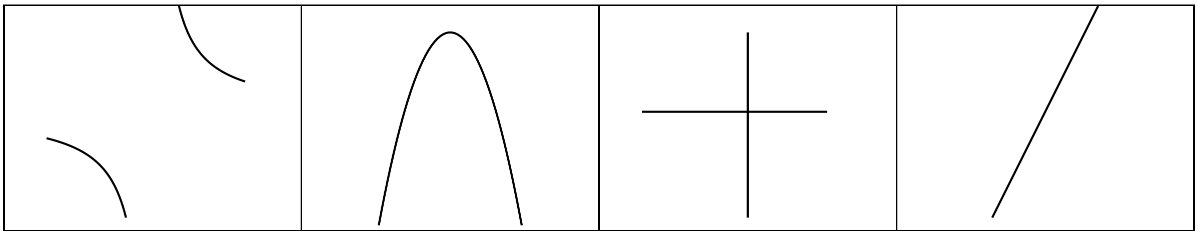


figure n° 1	figure n° 2	figure n° 3	figure n° 4

   (a) S_1 désigne la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan (xOy).

   Une des figures données représente S_1 laquelle ?

   (b) S_2 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{R}$ d'équation $z = 1$.

   Une des figures données représente S_2, laquelle ?

   (c) S_3 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 8$.

   Une des figures données représente S_3, laquelle ?

   (d) S_4 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + 2y = 29$ de la question 2.

   Déterminer les coordonnées des points communs é S_4 et $\mathcal{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation

   $3x + 2y = 29$.

3 Section d'une surface de révolution par un plan

3.1 Le cylindre

On considère un cylindre illimité d'axe (Oz) et de rayon r.

L'intersection de avec

– un plan $\mathscr{P}$ parallèle à (xOy), d'équation $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Le cercle $\mathscr{C}_a$ de rayon r et de centre $\Omega(0;0;a)$ dans le plan $\mathscr{P}$.

– un plan parallèle à (yOz) ou (xOz), d'équation $x = a$ ou $y = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ soit l'ensemble vide si $|a| > r$
  - ▶ soit une droite génératrice si $|a| = r$
  - ▶ soit la réunion de deux droites génératrices si $|a| < r$ (parallèles)

Preuve :

– Avec $\mathscr{P} : z = a$:

Un point $M(x;y;z)$ appartient à $\cap \mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} M(x;y;a) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$

On se place désormais dans le repère $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ où Ω est le point d'intersection $\mathscr{P}$ avec (Oz). On a $\Omega(0;0;a)$.

Alors dans ce repère les coordonnées de M sont $(x;y)$ et vérifient $x^2 + y^2 = r^2$.

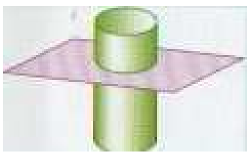
Donc dans le plan $\mathscr{P}$, ce point M décrit le cercle $\mathscr{C}_a$ de centre Ω et de rayon r.

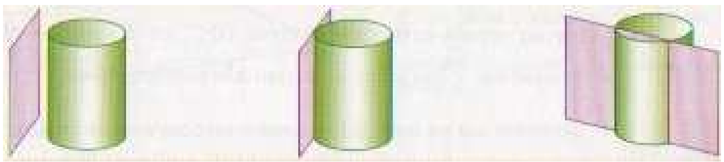
– Avec $\mathscr{R} : x = a$:

Un point $M(x;y;z)$ appartient à $\cap \mathscr{R}$ si et seulement si $\begin{cases} M(a;y;z) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$

On voit alors clairement que :
  - ▶ Si $|a| > r$ la deuxième condition est impossible à réaliser. Donc l'intersection est vide.
  - ▶ Si $|a| = r$ alors on a $y = 0$ et $M(a;0;z)$. Ce point décrit alors une droite parallèle à (Oz) (d'équation paramétrique : $x = a$, $y = 0$ et $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$.
  - ▶ Si $|a| < r$ alors on a $y = \sqrt{r^2 - a^2}$ ou $y = -\sqrt{r^2 - a^2}$ et M décrit alors deux droites distinctes et parallèles à (Oz).

– On peut faire le même raisonnement pour un plan d'équation $y = a$.





Animation disponible ici : www.amicollege.com/maths/docudyna/cabri.php ?nom=sec_cyl2

3.2 Le cône

On considère un cône illimité , de centre O et d'axe (Oz).

L'intersection de avec

- un plan $\mathscr{P}$ parallèle à (xOy), d'équation $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Soit le point O si $a = 0$.
  - ▶ Soit le cercle $\mathscr{C}_a$ de centre $\Omega(0; 0; a)$ dans le plan $\mathscr{P}$ si $a \neq 0$.
- un plan parallèle à (yOz) ou (xOz), d'équation $x = a$ ou $y = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Soit la réunion de deux droites génératrices (sécantes) si $a = 0$
  - ▶ Soit une hyperbole si $a \neq 0$

<u>Preuve</u> :

- Avec $\mathscr{P} : z = a$:

  Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\cap \mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} M(x; y; a) & \text{dans } (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \\ x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 & \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

  On se place désormais dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ où Ω est le point d'intersection $\mathscr{P}$ avec (Oz). On a $\Omega(0; 0; a)$.

  Alors dans ce repère les coordonnées de M sont $(x; y)$ et vérifient $x^2 + y^2 = (\lambda a)^2$.

  - ▶ Si $a \neq 0$ on a $r = \lambda a > 0$ et M décrit un cercle $\mathscr{C}_a$ de rayon r et de centre $\Omega(0; 0; a)$.
  - ▶ Si $a = 0$ on a $\lambda a = 0$, d'où $x^2 + y^2 = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

    Donc M est le point O.

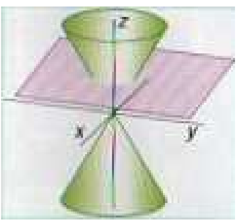
- Avec $\mathscr{R} : x = a$:

  Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\cap \mathscr{R}$ si et seulement si $\begin{cases} M(a; y; z) & \text{dans } (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \\ x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 & \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

  - ▶ Si $a = 0$ alors on a $y^2 = \lambda^2 z^2 \iff y = \pm \lambda z$.

    Donc l'intersection est la réunion de deux droites, sécantes en O.
  - ▶ Si $a \neq 0$ alors on a $a^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \iff \lambda z^2 = y^2 - a^2$.

    Pour reconnaître une hyperbole, on doit effectuer un changement de repère dans le plan $\mathscr{R}$.*Admis*
- On peut faire le même raisonnement pour un plan d'équation $y = a$.



Preuve (Suite) :

Hors programme : démontrons que la courbe d'équation $a^2 = \lambda^2 z^2 - y^2$ est une hyperbole.

On appelle Ω le point $\Omega(a;0;0)$ et on se place dans le plan $\mathscr{R}$, parallèle au plan (yOz), muni du repère : $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{a}{2}\vec{j} + \frac{a}{2\lambda}\vec{k}$ et $\vec{v} = -\frac{a}{2}\vec{j} - \frac{a}{2\lambda}\vec{k}$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{j} = \frac{1}{a}(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{k} = \frac{\lambda}{a}(\vec{u} + \vec{v}) \end{cases}$$

D'où

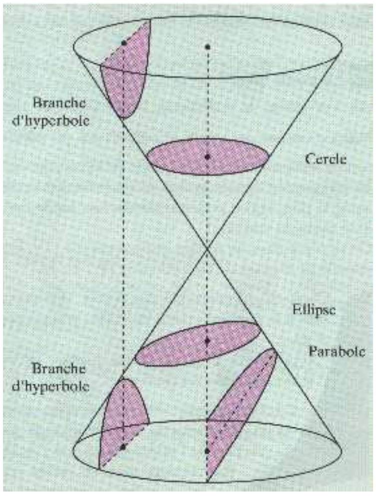
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M} &= \overrightarrow{\Omega 0} + \overrightarrow{OM} \\ &= 0 + \frac{y}{a}(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{z\lambda}{a}(\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \frac{y + z\lambda}{a}\vec{u} + \frac{-y + z\lambda}{a}\vec{v} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de $M(Y;Z)$ dans le nouveau repère sont $Y = \frac{y + z\lambda}{a}$ et $Z = \frac{-y + z\lambda}{a}$.

On constate alors que $YZ = \frac{z^2\lambda^2 - y^2}{a^2} = 1$.

D'où le fait que le point M décrive une hyperbole dans un repère approprié.

Remarque : En fait, les ellipses, paraboles et hyperboles sont des sections planes du cône droit, d'où leur nom de coniques.



Archimède avait découvert un grand nombre de propriétés élémentaires des coniques. La géométrie des coniques trouve une multitude d'applications dans l'astronomie, la physique et la mécanique.

Exercice 2 :

Soit le cône Γ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et le plan $\mathscr{P} : x = 1$.

Le but de cet exercice est de montrer que l'intersection $\mathscr{H} = \Gamma \cap \mathscr{P}$ est une hyperbole.

Soit $M(x; y; z)$ un point de $\mathscr{H}$. On a donc $M(1; y, z)$ et tel que $z^2 - y^2 = 1$.

On remarque que M ne décrit pas la courbe représentative d'une fonction. Par contre, on constate que $\mathscr{H}$ est la réunion des courbes d'équations $z = \sqrt{y^2 + 1}$ et $z = -\sqrt{y^2 + 1}$.

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : y \mapsto \sqrt{y^2 + 1}$.
   (b) Montrer que les droites d'équations $z = y$ et $z = -y$ sont asymptotes à la courbe.
   (c) Représenter alors la courbe représentative de f, puis $\mathscr{H}$.
   On constate que cette courbe ressemble à une hyperbole qui aurait tourné d'un quart de tour autour de O.
2. On se place désormais dans le plan $\mathscr{P}$, parallèle au plan (yOz).
   On va montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dans ce plan.
   Pour cela, on munit $\mathscr{P}$ du repère $(\Omega; \vec{U}; \vec{V})$ où $\Omega(1; 0; 0)$ le point où $\mathscr{P}$ coupe l'axe (Ox), $\vec{U} = \dfrac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{V} = \dfrac{-\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$.
   Ce repère est intuité par la rotation observée précédemment.
   Montrer alors que les coordonnées $(Y; Z)$ de M dans ce repère sont $\begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ Z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(z - y) \end{cases}$
3. Calculer YZ.
4. Conclure.

Remarque : Les lignes de niveau d'un cylindre et d'un cône sont des cercles centrés sur (Oz).

4 Surfaces définies par une équation

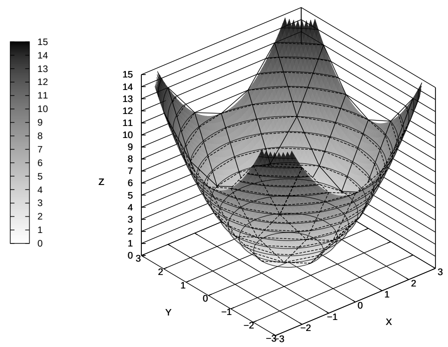
Nous nous contenterons d'étudier deux types de courbes en particulier : les paraboloïdes elliptiques et les paraboloïdes hyperboliques.

4.1 Les paraboloïdes elliptiques

Définition 6 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 = \lambda z$ est une surface appelé paraboloïde elliptique de sommet O et d'axe (Oz).

Remarque : Ce type de paraboloïde est aussi appelé paraboloïde de révolution, car on peut la considérer comme la surface obtenue en faisant tourner une parabole autour de l'axe (Oz).



Propriété 1 :

– Le paraboloïde est symétrique par rapport à son axe.

– Les surfaces obtenus pour λ et $-\lambda$ sont symétriques par rapport à O et à (xOy).

***Preuve* :**

Trivial

On considère un paraboloïde elliptique Γ de sommet O et d'axe (Oz).

L'intersection de avec

– un plan $\mathscr{P}$ parallèle à (xOy), d'équation $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Soit l'ensemble vide si a et λ sont de signe différent
  - ▶ Soit le point O si $a = 0$.
  - ▶ Soit le cercle $\mathscr{C}_a$ de centre $\Omega(0;0;a)$ et de rayon $\sqrt{\lambda a}$ dans le plan $\mathscr{P}$ si a et λ sont de même signe.

– un plan parallèle à (yOz) ou (xOz), d'équation $x = a$ ou $y = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Une parabole d'axe parallèle à (Oz) et de sommet le point $\Omega(a;0;0)$ ou $\Omega(0;a;0)$.

***Preuve* :**

– Avec $\mathscr{P} : z = a$:

Un point $M(x;y;z)$ appartient à $\cap\mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} M(x;y;a) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ x^2 + y^2 = \lambda z \end{cases}$

On voit alors clairement que :
  - ▶ Si $\lambda a < 0$ la deuxième condition est impossible à réaliser. Donc l'intersection est vide.
  - ▶ Si $a = 0$ alors on a $x = 0$ et $y = 0$ donc $M(0;0;0)$.
  - ▶ Si $\lambda a > 0$ alors M décrit un cercle de centre $\Omega(0;0;a)$ et de rayon $\sqrt{\lambda a}$

– Avec $\mathscr{R} : x = a$:

Un point $M(x;y;z)$ appartient à $\cap\mathscr{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} M(a;y;z) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ x^2 + y^2 = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} M(a;y;z) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ a^2 + y^2 = \lambda z \end{cases}$$

Soit Ω le point où $\mathscr{R}$ coupe l'axe (Ox). On a $\Omega(a;0;0)$. On se place désormais dans $\mathscr{R}$ muni du repère $(\Omega;\vec{j};\vec{k})$. Alors le point M décrit une parabole de sommet Ω et d'axe (Oz).

– On peut faire le même raisonnement pour un plan d'équation $y = a$.

Remarque : Si on coupe le paraboloïde elliptique suivant deux plans parallèles à (xOz) ou (yOz), les sections sont isométriques.

Exercice 3 :

La Réunion Juin 2009 (Exercice 4) **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z=-\dfrac{1}{4}$.

   On note $d(M,\ P)$ la distance d'un point M au plan P.

   Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $d(M,\ P)=MF$ a pour équation $x^2+y^2=z$.

2. (a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z=2$?

   (b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x=0$?
   Représenter cette intersection dans le repère $(O;\vec{j};\vec{k})$.

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

   (a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

   (b) Démontrer que 7 divise x^2+y^2 si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

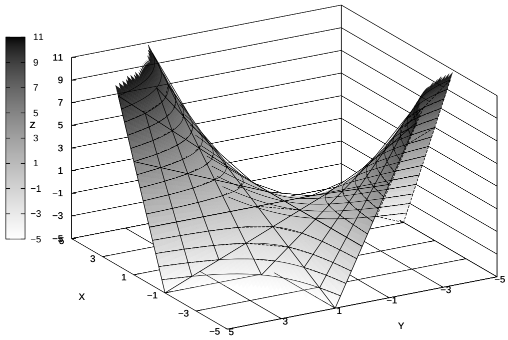
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

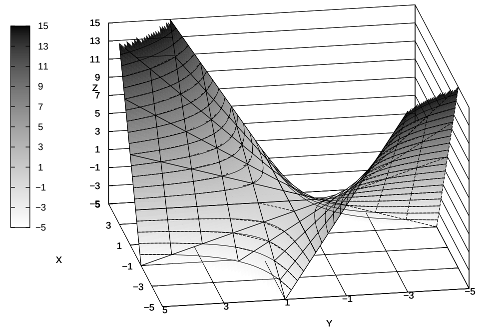
   Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z=98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

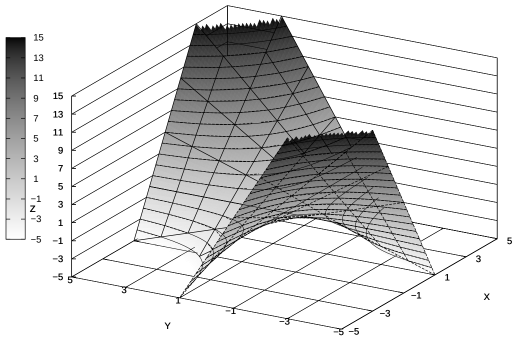
4.2 Les paraboloïdes hyperboliques

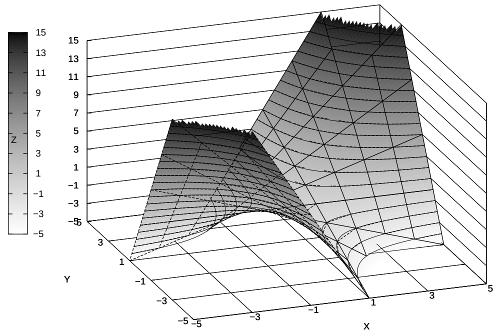
Définition 7 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $xy = \lambda z$ est une surface appelé paraboloïde hyperbolique.









Propriété 2 :

Le paraboloïde est symétrique par rapport aux axes du repère.

***Preuve* :**

Trivial

On considère un paraboloïde hyperbolique Γ.

L'intersection de avec

– un plan $\mathscr{P}$ parallèle à (xOy), d'équation $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Soit la réunion des axes (Ox) et (Oy) si $a = 0$
  - ▶ Soit une hyperbole équilatère si $a \neq 0$.

– un plan parallèle à (yOz) ou (xOz), d'équation $x = a$ ou $y = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé est :
  - ▶ Une droite.

Preuve :

- Avec $\mathscr{P} : z = a$:

  Un point $M(x;y;z)$ appartient à $\cap\mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} M(x;y;a) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ xy = \lambda z \end{cases}$

  On voit alors clairement que :

  ▶ Si $a = 0$ alors soit $x = 0$, soit $y = 0$. D'où la réunion des deux axes.

  ▶ Si $a \neq 0$ alors on a $xy = \lambda a$ et M décrit une hyperbole dans le plan $\mathscr{P}$.

- Avec $\mathscr{R} : x = a$:

  Un point $M(x;y;z)$ appartient à $\cap\mathscr{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} M(a;y;z) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ xy = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} M(a;y;z) & \text{dans } (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}) \\ ay = \lambda z \end{cases}$$

  D'où M décrit une droite dans le plan $\mathscr{R}$.

- On peut faire le même raisonnement pour un plan d'équation $y = a$.

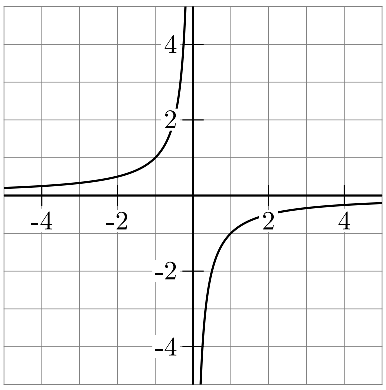
Exemple :

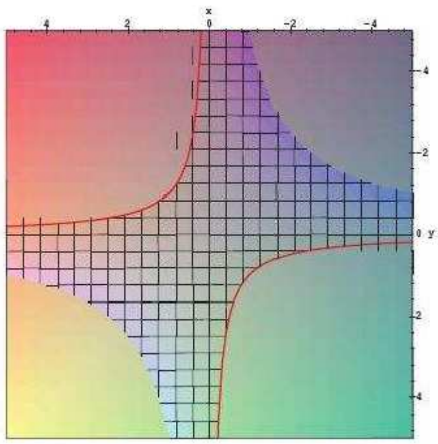
On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = xy$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $z = -1$.

Figure $section_hyp$

L'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x;y;z)$ tels que $\begin{cases} z = -1 \\ z = xy \end{cases}$

C'est-à-dire l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ tels que $xy = -1 \iff y = -\dfrac{1}{x}$. Il s'agit dans ce plan de la courbe représentative d'une hyperbole.





Exercice 4 :

Amérique du Sud Novembre 2008 (Exercice 2) **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t' \\ y & = & -t' \\ z & = & -2 \end{array}\right. \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. **Une équation de S**

   (a) Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite D. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}\,;\,\dfrac{x-y}{2}\,;\,2-z\right)$. En déduire MH^2 en fonction de x, y et z. Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

   (c) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. **étude de la surface S d'équation$z = -\dfrac{1}{4}xy$**

   (a) On coupe S par le plan $(x\mathrm{O}y)$. Déterminer la section obtenue.

   (b) On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.* On coupe S par le plan d'équation $x+y=0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

Exercice 5 :

Polynésie Juin 2007 (Exercice 3) **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points A $(1\,;\ 3\,;\ 2)$, B$(4\ ;\ 6\ ;\ -4)$ et le cône (Γ) d'axe $\left(\text{O},\ \vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}z^2$.
2. Soit (P) le plan parallèle au plan $(x\text{O}y)$ et contenant le point B.
   (a) Déterminer une équation de (P).
   (b) Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).
3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).
   Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
   - deux droites parallèles ;
   - deux droites sécantes ;
   - une parabole ;
   - une hyperbole ;
   - un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x,y,z). Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2+y^2=40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Résoudre l'équation (E).
   (b) En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. (a) Démontrer que si le point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.
   (b) Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2\equiv 1$ modulo 10.
   (c) Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2\equiv 1$ modulo 10.
   (d) Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 6 :

Amérique du Nord Juin 2008 (Exercice 2) **5 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan $(x\mathrm{O}y)$.
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   (b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$.
4. (a) On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z=68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   (b) M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a<b$ et $\mathrm{ppcm}(a\ ;\ b)=440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système
   $$(1) : \begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4\ 625 \\ \mathrm{ppcm}(a\ ;\ b)=440 \end{cases}$$
   Montrer que si $(a,\ b)$ est solution de (1) alors $\mathrm{pgcd}(a\ ;\ b)$ est égal à 1 ou 5.
   Conclure

   Dans cette question toute trace de recherche même incomplete ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

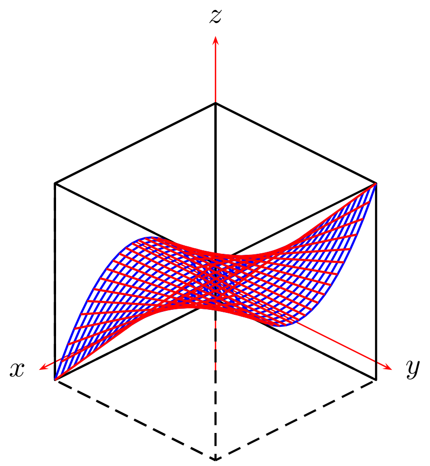
Exercice 7 :

Centre étrangers Juin 2003 (Exercice 2) **6 points**

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère la surface **T** d'équation : $x^2y = z$ avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.



1. éléments de symétrie de la surface **T**.
   (a) Montrer que si le point $M(x,\ y,\ z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x,\ y,\ z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.
   (b) Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.
2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.
   (a) Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (xOz).
   (b) Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (yOz).
3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z = k$, avec $k \in [0\ ;\ 1]$.
   (a) Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.
   (b) Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0,\ 0,\ k)$. Déterminer, dans le repère $\left(K\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.
   (c) Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $\left(K\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.
4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(\text{D}) = M(x,\ y,\ z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ ; 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant x^2y.$$

   (a) Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3. c.**. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y \geqslant \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$. Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.
   (b) On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D). On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\, \mathrm{d}k$.

Exercice 8 :

France Juin 2003 (Exercice 2) **5 points**

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* 1. *et* 2. *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1. c.** *intervient à la question* **4.**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
   (a) Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.
   (b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.
   (c) On considére le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice. Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.
2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de l avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

   Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

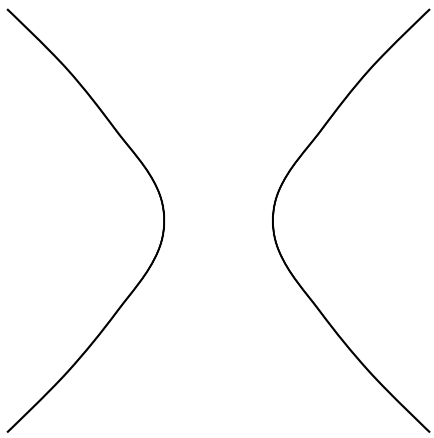


Figure 1

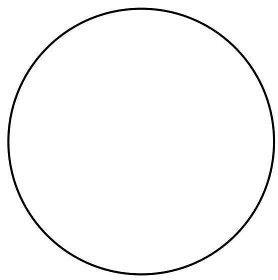


Figure 2

3. (a) Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier reIatif, n'a pas de solution,
   (b) Montrer la propriété suivante :

   pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.
4. (a) Soient $a,\ b$ et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

   si le point A de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ est un point du cône Γ alors $a,\ b$ et c sont divisibles par 7.
   (b) En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Les Annexes