Exercices du chapitre 1 : Introduction à l'arithmétique

Exercice 1.

1. Soit $n = 2183$ dans le système décimal. Déterminer son écriture en base 8.
2. Soit lenombre 5241, écrit dans une certaine base.
   - Peut-il être écrit e base 5 ?
   - Supposons qu'il soit écrit en base 6. Donner sa correspondance en base 10.

Exercice 2. Ecrire l'ensemble de tous les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de chacun des nombres 20, 28 et 75.

Exercice 3. a et b sont des entiers avec $b \neq 0$.
A quelle condition le nombre $\dfrac{a}{b}$ est-il entier ?

Exercice 4. Soit un entier a quelconque. Prouver que $a(a^2 - 1)$ est un multiple de 6.

Exercice 5. Questions classiques (indépendantes)

1. Soit n un entier relatif. En vérifiant que $2n + 1 = 2(n - 3) + 7$ trouver l'ensemble des entiers n telsque $(n - 3)$ divise $(2n + 1)$.
2. Soit n un entier naturel. En vérifiant que $n^2 - n + 3 = (n - 2)(n + 1) + 5$ trouver l'ensemble des entiers n telsque $(n + 1)$ divise $(n^2 - n + 3)$.
3. Déterminer les valeursdel'entier relatifs n pour lesquelles la fraction $\dfrac{3n + 8}{n + 4}$ peut se simplifier sous forme d'un entier relatif.

Exercice 6. $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A = n^4 - 1$.

1. Démontrer que $n - 1$, $n + 1$, $n^2 + 1$ sont des diviseurs de A.
2. En déduire d'autres diviseurs de A.

Exercice 7.

1. Trouver tous les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 21.
2. Trouver tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que $a^2 - b^2 = 21$

Exercice 8. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que $x^2 - 2xy = 15$

Exercice 9. Soient k un entier naturel, $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$.
Prouver que les seuls diviseurs positifs communs aux entiers a et b sont 1 et 5.
Utiliser la propriété 5 avec des valeurs de u et v bien choisies.

Exercice 10. Soient k un entier naturel, $a = 6k + 5$ et $b = 8k + 3$.
Prouver que les seuls diviseurs positifs communs aux entiers a et b sont 1 et 11.

Exercice 11. Soient k un entier naturel, $a = 3k + 5$ et $b = 2k + 1$.
Prouver que les seuls diviseurs positifs communs aux entiers a et b sont 1 et 7.

Exercice 12. Trouver tous les entiers naturels n tels que $n + 8$ est un mutiple de n.

Exercice 13. Expliquer pourquoi il est impossible de trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $6v - 9v = 2$.

Exercice 14. Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 9$ par $n + 2$.

Exercice 15. Problème de bac

1. Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$
3. En déduire que pour tout n,$3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que quel que soit n,$3n^2+5n+1$ est impair ; puis que ce polynôme n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

Exercice 17. Démontrer que $671^{800} - 1$ est divisible par 6.

Exercice 18. Le but de cet exercice est de calcuer lereste de la division par 7 du nombre 247^{349}

1. Vérifier que $247 \equiv 2\,[7]$
2. Vérifier que $2^{3k} \equiv 1$, $2^{3k+1} \equiv 2$,$2^{3k+2} \equiv 4$ $[7]$
3. En déduire le reste de la division de 247^{349} par 7.