Chapitre 7

2^{nde}

Fonctions de référence

Dernière modification : 27 avril 2010

D. ZANCANARO

« Flower Chucker » BANKSY-POCHOIRISTE

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* » Thurston Moore (Sonic Youth)

Cours : Fonctions de référence

I) La fonction carrée

I-1 Définition

Définition 1 :
On appelle fonction carrée la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Propriété 1 :
La fonction carrée ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 **:**
f est la fonction carré. Calculer les images par f des réels :

1. -4
2. $\dfrac{2}{3}$
3. $-\dfrac{11}{5}$
4. $3\sqrt{56}$
5. $-2\sqrt{13}$
6. 10^{41}
7. 8×10^{-4}
8. $2 + \sqrt{5}$

I-2 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 2 :
La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Preuve
Considérons deux réels a et b tels que $0 \leq a < b$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) < 0 \iff a^2 < b^2$$

Par conséquent les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre et la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
Considérons deux réels a et b tels que $0 \leq a < b$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 0 \iff a^2 > b^2$$

Par conséquent les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse et la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Exercice 2 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$
3. π^2 et $(\pi - 1)^2$
4. $(2 - \sqrt{7})^2$ et $(2 - \sqrt{5})^2$

Exercice 3 :

1. Soit x un réel tels que $2 \leq x \leq 4$. Donner un encadrement de $-3x^2$.
2. Soit y un réel tels que $-9 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de de $\dfrac{y^2}{5}$.
3. Soit z un réel tels que $-9 \leq z \leq 1$. Donner un encadrement de de z^2.
4. Soit t un réel tels que $0 \leq \sqrt{-5t-1} \leq 2$. Donner un encadrement de t.

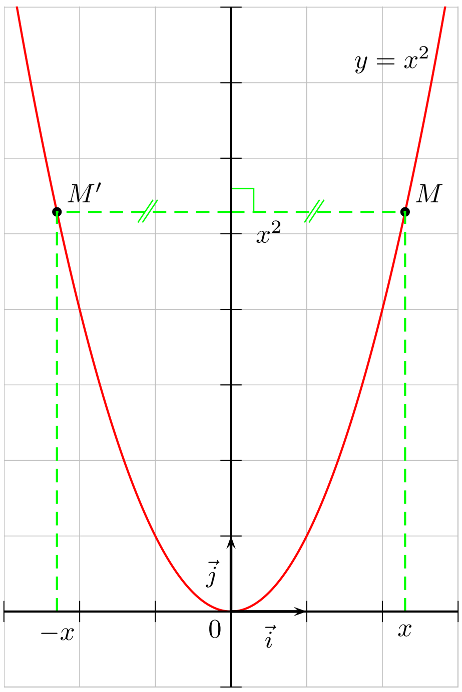
I-3 Courbe représentative

Définition 2 :

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** de sommet l'origine du repère.

On esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	...



Propriété 3 :

La courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On dit que la fonction est *paire*.

Preuve

Pour tout nombre réel x le point $M(x;x^2)$ est sur la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction carré.
Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x;x^2)$.
Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{P}$ car $(-x)^2 = x^2$.

Remarque : On sait qu'un carré est toujours positif.

Exercice 4 :

Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction carré :

1. $x^2 \leq 5$
2. $x^2 \leq -3$
3. $x^2 > 2$

Exercice 5 :

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.
Comparer alors un réel et son carré. Justifier les réponses.

Exercice 6 :

1. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[-3;3]$, puis celle de la fonction affine $x \mapsto -x+2$.
2. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
3. Développer $(x+2)(x-1)$.
4. Retrouver les solutions de la première question par le calcul.

II) La fonction Inverse

II-1 Définition

Définition 3 :

On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 4 :

La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que $x \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 7 **:**

f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels *(sans laisser de racine au dénominateur)* :

1. -4
2. 0.5
3. $\dfrac{2}{3}$
4. $-\dfrac{11}{5}$
5. $\sqrt{56}$
6. $-2\sqrt{13}$
7. 10^{41}
8. 8×10^{-4}

II-2 Sens de variation et tableau de variations

Propriété 5 :

La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Preuve

Considérons deux réels a et b tels que $0 < a < b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Par conséquent les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

Considérons deux réels a et b tels que $a < b < 0$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Par conséquent les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 8 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\dfrac{1}{-0.012}$ et $\dfrac{1}{-0.099}$
2. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{0.21}$
3. $\dfrac{1}{\pi-3}$ et $\dfrac{1}{-0.21}$
4. $\dfrac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercice 9 :

1. Soit x un réel tels que $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $-\dfrac{4}{x}$.
2. Soit y un réel tels que $-5 \leq y \leq -2$. Donner un encadrement de $\dfrac{10}{y}$.
3. Soit z un réel tels que $0 \leq \dfrac{1}{-5x-1} \leq 2$. Donner un encadrement de x.

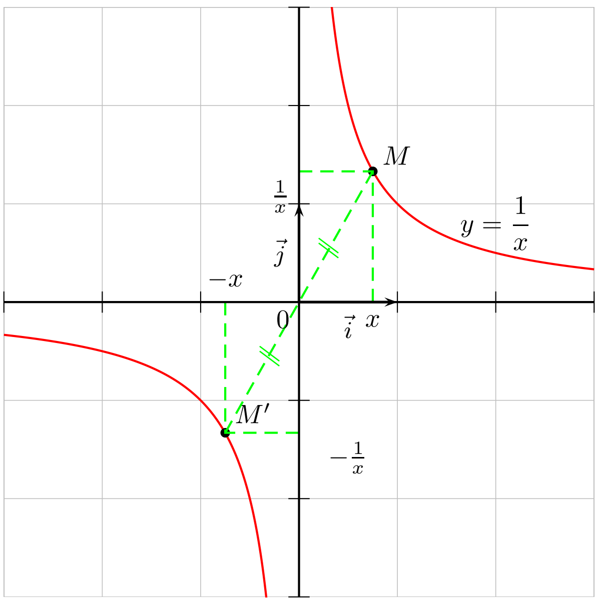
II-3 Courbe représentative

Définition 4 :

Dans un repère orthogonal, la courbe repésentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

On esquisse la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-1	-2	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$
$f(x)$	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	-2	-3



Propriété 6 :

La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère. On dit que la fonction est *impaire.*

Preuve

Pour tout nombre réel $x \neq 0$ le point $M\left(x; \dfrac{1}{x}\right)$ est sur la hyperbole $\mathscr{H}$ représentative de la fonction inverse.
Son symétrique par rapport à l'origine du repère est $M'\left(-x; -\dfrac{1}{x}\right)$.
Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{H}$ car $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

Remarque : On sait déjà que $\dfrac{1}{x}$ est du signe de x.

Exercice 10 :

Résoudre chaque inéquation en s'aidant de la courbe de la fonction inverse :

1. $\dfrac{1}{x} \leq 3$
2. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{4}{3}$
3. $\dfrac{1}{x} > -2$

III) Les fonctions polynômes de degré 2

III-1 Généralités

Définition 5 :
On dit qu'une fonction f est une fonction polynôme de degré 2 si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels tels que } a \neq 0$$

Exemple :
Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes de degré 2 :

1. $P_1(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ($a = 2$, $b = -3$ et $c = 4$)
2. $P_2(x) = x^2$ ($a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$)
3. $P_3(x) = x^2 + 4$ ($a = 1$, $b = 0$ et $c = 4$)
4. $P_4(x) = 3x^2 - 3x$ ($a = 3$, $b = -3$)

Remarque : En reprenant $P_1(x)$, on appelle 4, $-3x$ et $2x^2$ les monômes respectivement constant, de degré 1 et de degré 2, c'est pourquoi on appelle ce type de fonctions des fonctions polynômes

Contre-Exemple :
Toutes les fonctions ne sont pas des polynômes de degré 2, comme les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 2x - 1$ (polynôme mais de degré 1)
2. $f_2(x) = x^3$ (polynôme mais de degré 3)
3. $f_3(x) = \sqrt{x}$ (en rien une fonction polynôme)
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$ (nullement une fonction polynôme)

Exercice 11 **:**
Montrer que les fonctions suivantes sont des polynômes du second degré :

1. $P_1(x) = (5x - 1)^2$
2. $P_2(x) = (3x - 1)(2x + 1)$
3. $P_3(x) = (x - 4)(x + 4)$
4. $P_4(x) = 2x(x - 1) - (x + 2)(x - 3)$

Remarque :
- Il s'agit de l'écriture développée de $f(x)$.
- On admet que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où α et β sont des nombres réels. Il s'agit de la <u>forme canonique</u> de $f(x)$. On va plus particulièrement étudier cette forme dans la partie suivante.
- Lorsque $\beta < 0$, on peut factoriser $f(x)$ à l'aide de la troisième identité remarquable et on obtient une nouvelle écriture de la forme
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Définition 6 :
Soit λ un nombre réel et P un polynôme. On dit que λ est une racine du polynôme P si et seulement si

$$P(\lambda) = 0$$

Exemple :
Considérons le polynôme P définie par $P(x) = x^2 - 4$ alors -2 et 2 sont des racines de P, en effet $P(2) = P(-2) = 0$

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Montrer que $f(x) = (x-2)^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ de deux manières différentes.
2. Factoriser $f(x)$
3. En déduire les racines de f

Application :

Un rectangle a pour périmètre $P = 14$ m et pour aire $S = 12\ m^2$. Quels sont les dimensions de ce rectangle ?
Modélisation : Soient x et y les dimensions de ce rectangle, on obtient :

$$x + y = \frac{P}{2} \text{ et } xy = S = 12$$

En remplaçant y par $7 - x$ on obtient l'équation $x(7-x) = 12$ qui peut s'écrire encore $x^2 - 7x + 12 = 0$
Résoudre une telle équation revient à trouver les racines de P où $P(x) = x^2 - 7x + 12$
On canonise P :

$$P(x) = x^2 - 2 \times \frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

On factorise P :

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(x - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(x - \frac{14}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{14}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(x - \frac{13}{4}\right)\left(x - \frac{15}{4}\right) \end{aligned}$$

Enfin on trouve les racines :

$$\begin{aligned} & P(x) = 0 \\ \iff & \left(x - \frac{13}{4}\right)\left(x - \frac{15}{4}\right) = 0 \\ \iff & x = \frac{13}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Par conséquent si $x = \frac{13}{4}$ alors $y = 7 - x = 7 - \frac{13}{4} = \frac{15}{4}$ et si $x = \frac{15}{4}$ alors $y = 7 - x = 7 - \frac{15}{4} = \frac{13}{4}$
Autrement dit les dimensions du rectangle sont $\frac{13}{4}$ pour la largeur et $\frac{15}{4}$ pour la longueur

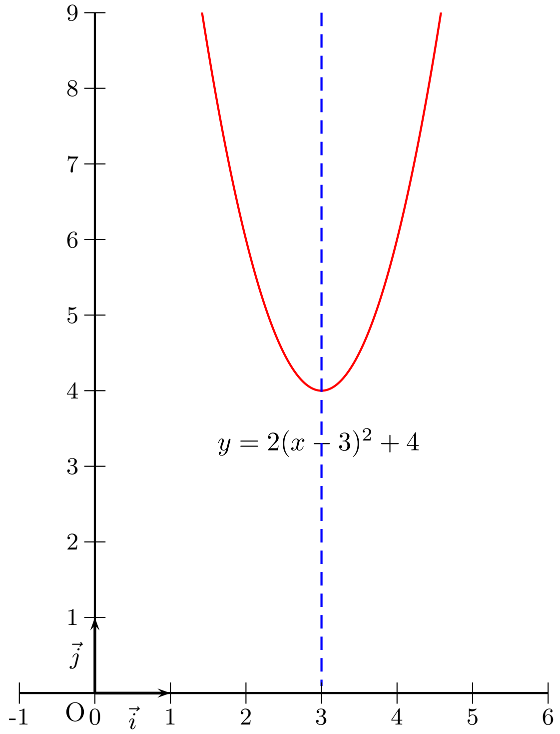
III-2 Les fonctions du type : $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$

III-2.1 sens de variation

Exercice 13 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2(x-3)^2+4$
Montrer que f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;3]$

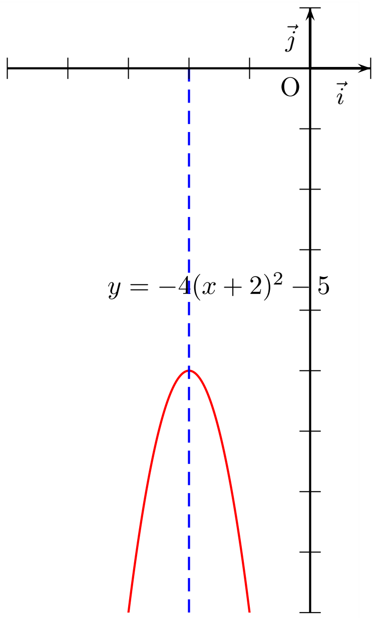
A titre d'illustration voici la courbe de la fonction f en rouge et son axe de symétrie en bleu :



Exercice 14 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4(x+2)^2-5$
Montrer que f est strictement décroissante sur $[-2;+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty;-2]$

A titre d'illustration voici la courbe de la fonction f en rouge, et son axe de symétrie en bleu :

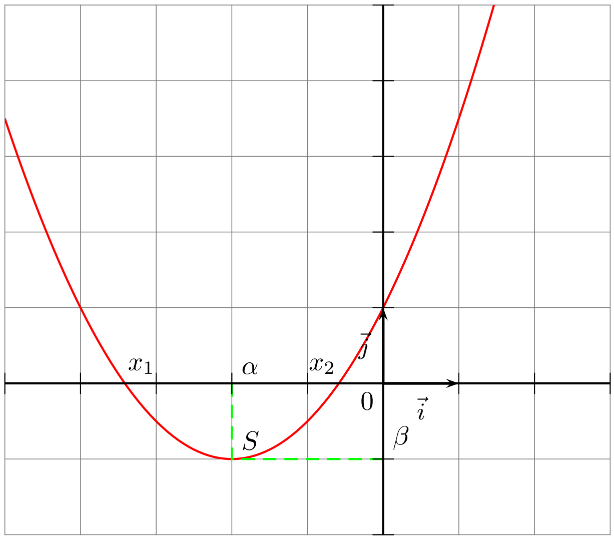


III-2.2 Représentation graphique de f

Propriété 7 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de f est une parabole $\mathscr{P}$ de sommet $S(\alpha;\beta)$ qui admet la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie

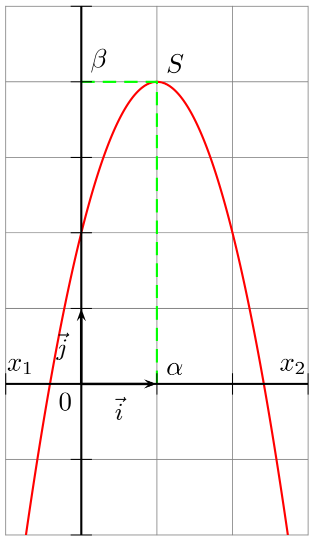
Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$\searrow$	β	$\nearrow$



Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$\nearrow$	β	$\searrow$



Exercice 15 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
2. Montrer que $f(x) = -2(x-4)(x-2)$
3. Sélectionner dans chaque cas la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes et y répondre.
   (a) En quel point la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?
   (b) En quels points la courbe $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Quel est le sens de variation de la fonction f ?
   (d) Quel est le maximum de la fonction ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 16 :

Voici trois forme de la même fonction f :

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 27 \qquad f(x) = 3(x-1)(x+5) \qquad f(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

1. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les images de : $-2 \quad 1 \quad 0$
2. Choisir l'expression la mieux adaptée et calculer les antécédents de : $0 \quad -15 \quad -27$
3. -30 a-t-il des antécédents par f ?
4. Dresser le tableau de variations de f. Quel est le minimum de f ? Pour quel nombre x est-il atteint ?

Exercice 17 :

f est une fonction polynôme de degré 2. Voici son tableau de variations :

x	3		1		5
$f(x)$		↗	1.85	↘	-2.15

– Peut-on savoir $f(-3)$? Justifier.
– Donner l'expression de $f(x)$.

IV) Les fonctions homographiques

Définition 7 :

Une fonction f est une fonction homographique si et seulement si il existe des nombres réels a, b, c et d, avec $c \neq 0$ tels que pour tout nombre réel x n'annulant pas le dénominateur on a $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Propriété 8 :

L'ensemble de définition d'une fonction homographique du type $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est

$$\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$$

Preuve

$cx + d = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{d}{c}$

Exercice 18 :

Soit f la fonction $x \mapsto -3 + \dfrac{1}{x+1}$

1. Identifier l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est une fonction homographique.
3. Ecrire l'algorithme de calcul $f(x)$
4. Soient a et b deux réels appartenant à $]-1;+\infty[$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-1;+\infty[$.
5. En procédant de même, étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;-1[$.
6. Dresser le tableau de variations de f
7. Dresser le tableau de signes de f