

## CORRECTION DU DEVOIR MAISON 3 : LES VECTEURS

**Exercice 1.** Soit  $ABC$  un triangle.

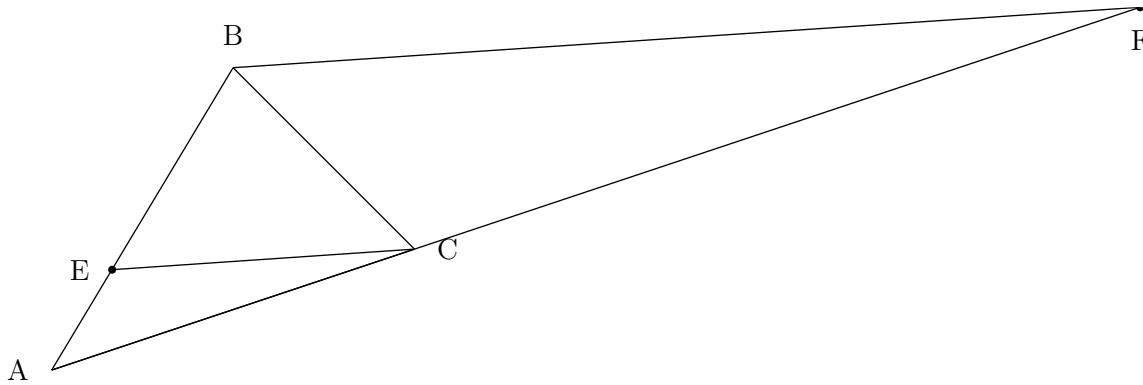
1. Placer le point  $E$  tel que  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2. Placer le point  $F$  tel que  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$
3. Démontrons que les droites  $(CE)$  et  $(FB)$  sont parallèles!

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

et

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$$

Par conséquent, les vecteurs  $\overrightarrow{FB}$  et  $\overrightarrow{CE}$  ont la même direction, et donc les droites  $(CE)$  et  $(FB)$  sont parallèles.



**Exercice 2.**  $ABCD$  est un parallélogramme

1. Construire les points  $F$  et  $E$  tels que :  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$
2. Construire le point  $G$  tel que  $AEGF$  soit un parallélogramme
3. Démontrons que les points  $A$ ,  $C$  et  $G$  sont alignés!!

Comme  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ , on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} &= 2\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EG}\end{aligned}$$

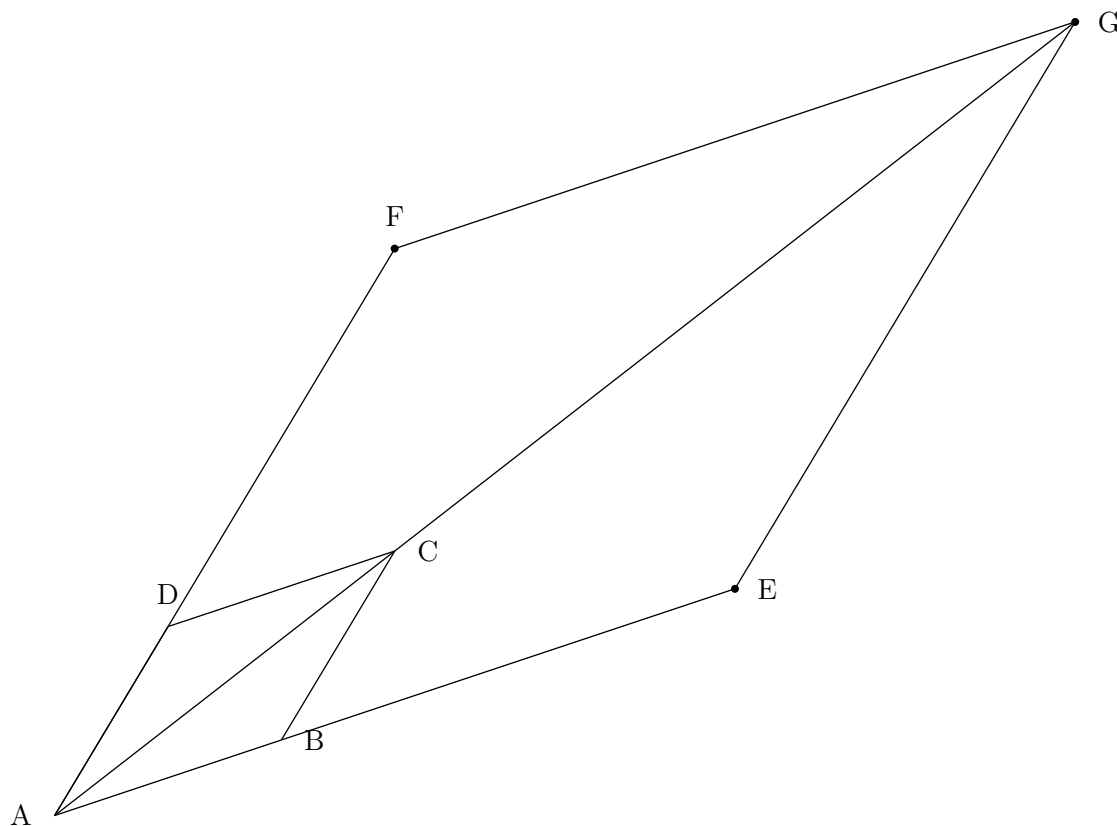
Or, comme  $AEGF$  est un parallélogramme on a :  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AF}$  et donc :

$$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$$

De plus, puisque  $ABCD$  est un parallélogramme (on a donc  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ )

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$$

Ceci montre que les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AG}$  ont la même direction et donc que les droites  $(AC)$  et  $(AG)$  sont parallèles, et puisque qu'elles contiennent toutes les deux le point  $A$ , elles sont donc confondues et donc les points  $A$ ,  $G$  et  $C$  sont alignés.



**Exercice 3.**  $G$  est le centre de gravité d'un triangle  $ABC$

Démontrer que pour tout point  $M$  du plan on a :  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

Démonstration :

Si  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$  alors on a :  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$   
Or, pour tout point  $M$  du plan on a :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC} = 3\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{MG} + \vec{0} = 3\vec{MG}$$

**Exercice 4.**  $ABC$  est un triangle de centre de gravité  $G$ . Le point  $Z$  est le milieu de  $[AC]$ .

1. Faire une figure puis placer les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  définis par  $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC}$  et  $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CA}$
2. On sait que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$  donc

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

Et donc

$$\vec{GI} + \vec{IB} + \vec{GJ} + \vec{JC} + \vec{GK} + \vec{AK} = \vec{0}$$

i.e

$$\vec{GI} - \frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{GJ} - \frac{1}{3}\vec{CA} + \vec{GK} - \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{0}$$

Ce qui donne :

$$\vec{GI} + \vec{GJ} + \vec{GK} + \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \vec{0}$$

Au final :

$$\vec{GI} + \vec{GJ} + \vec{GK} = \vec{0}$$

Cette dernière égalité montre que  $G$  est aussi le centre de gravité du triangle  $IJK$

3.  $\vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CJ}$

Comme  $\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC}$  et comme  $\vec{BI} + \vec{IC} = \vec{BC}$  on obtient :

$$\vec{IC} = \vec{BC} - \vec{BI} = \vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{BC}$$

Résumons :

$$\vec{IC} = \frac{2}{3}\vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CA}$$

Donc :

$$\vec{IJ} = \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CA}$$

De plus  $Z$  est le milieu de  $[AC]$ , par conséquent  $\vec{CA} = 2\vec{CZ}$  et donc :

$$\frac{1}{3}\vec{CA} = \frac{1}{3} \times 2\vec{CZ} = \frac{2}{3}\vec{CZ}$$

Ce qui donne :

$$\vec{IJ} = \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CZ} = \frac{2}{3}(\vec{BC} + \vec{CZ}) = \frac{2}{3}\vec{BZ}$$

4. Comme  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$  alors

$$\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BZ}$$

Par conséquent, en utilisant la question précédente  $\vec{IJ} = \vec{BG}$  et donc  $BIJG$  est un parallélogramme

