Chapitre 3 : Second degré et fonction polynôme

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 22 novembre 2009

Table des matières

1 Trinôme du second degré **1**

2 Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ **3**
2.1 forme canonique du trinôme 3
2.2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ 4

3 Factorisation du trinôme **5**

4 Signe du trinôme **5**

5 Fonctions polynômes **6**
5.1 Fonction polynôme du second degré 6
5.1.1 Définition 6
5.1.2 Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré 6
5.2 Fonction polynôme de degré quelconque 8

Cours : Second Degré et Fonction Polynôme

Type de problèmes que l'on souhaite résoudre

Situation : Un rectangle a pour périmètre $P = 14$ m et pour aire $S = 12\ m^2$. Quels sont les dimensions de ce rectangle ?

Modélisation : Soient x et y les dimensions de ce rectangle, on obtient :

$$x + y = \frac{P}{2} \text{ et } xy = S = 12$$

En remplaçant y par $7 - x$ on obtient l'équation $x(7 - x) = 12$ qui peut s'écrire encore $x^2 - 7x + 12 = 0$
Comment résoudre une telle équation ?

Un peu d'histoire

Dans l'exemple précédent, pour résoudre ce problème il s'agit de trouver les solutions de l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$. Au $V^{\text{ème}}$ siècle, la pensée mathématique s'épanouit dans le moyen orient, sous l'impulsion géniale d'Al Khwarizmi. Son nom est à la base du mot algorithme ! Il est le premier à résoudre couramment des équations du second degré. La nouveauté apporté par Al-Khwarizmi correspond à une véritable évolution des mentalités : il ne s'agit plus de résoudre des problèmes arithmétiques ou géométriques que l'on peut traduire en équations, mais de partir des équations dont chacune recouvre une classe infinie de problèmes variés. Autrement dit, **Al Khwarizmi** résout toutes les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, et lorsque l'on tombe sur un problème qui aboutit à une telle équation, il n'y a plus qu'à lui appliquer le même **algorithme** qu'aux équations du même type !

1 Trinôme du second degré

Définition 1. On appelle trinôme du second degré toute expression pouvant s'écrire $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Exemples :

1. $x^2 - 4x + 1$ $(a = 1; b = -4; c = 1)$
2. $-7x^2 + 4x$ $(a = -7; b = 4; c = 0)$
3. $\sqrt{2}x^2$ $(a = \sqrt{2}; b = 0; c = 0)$
4. $(x + 1)^2$ $(a = 1; b = 2; c = 1)$

Contre-exemples :

1. $3x + 1$ est un binôme du premier degré
2. $x^3 + 2x + 3$ est un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré
3. $(x + 1)^2 - x^2$ est un binôme du premier degré.
4. $2x^2 + \dfrac{1}{x}$ n'est pas un trinôme du 2^{nde} degré.

Question : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ deux trinômes du second degré. A quelles conditions sont ils égaux ?

On dit que $P = Q$ si, et seulement si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e : Supposons que $P = Q$, on a alors :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Si on choisit $x = 0$ on obtient : $c = c'$ et l'égalité devient :

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Si on choisit $x = 1$ on obtient : $a + b = a' + b'$
Si on choisit $x = -1$ on obtient : $a - b = a' - b'$
En soustrayant, puis en ajoutant, membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$2b = 2b' \text{ et } 2a = 2a'$$

Au final : $a = a'; b = b'$ et $c = c'$

Propriété 1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ deux trinômes du second degré. P et Q sont égaux si, et seulement si $a = a'; b = b'$ et $c = c'$

Exercice 1.1. Soit $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Démontrer que $P = Q$

Définition 2. On appelle racine du trinôme toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Exemple : 3 est racine du trinôme $2x^2 - 5x - 3 = 0$

Exercice 1.2. Trouver les racines du polynôme $x^2 - 7 = 0$

Question : D'une manière générale, comment trouver les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$? Existe-t-il un algorithme permettant de trouver les racines de n'importe quel trinôme ?

2 Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

2.1 forme canonique du trinôme

But : Comme dans l'exercice précédent, on tente de factoriser le trinôme afin d'obtenir les racines. On essaye de rendre l'expression factorisable, à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Etude sur des cas particuliers :

1. $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Ce trinôme admet donc comme seule racine -1
2. $x^2-8x+9=(x-4)^2-16+9=(x-4)^2-7$.
   Ainsi, résoudre $x^2-8x+9=0$ revient à résoudre : $(x-4)^2-7=0$, ce qui donne :
   $$(x-4-\sqrt{7})(x-4+\sqrt{7})$$
   D'où : $$S=\{4-\sqrt{7};4+\sqrt{7}\}$$

Cas Général : transformation de l'écriture ax^2+bx+c

On met a en facteur ($a\neq 0$) : $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Or : $$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$$

Au final : $$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Définition 3. On appelle discriminant du trinôme, le nombre réel noté Δ, défini par :

$$\Delta=b^2-4ac$$

L'expression précédente s'écrit alors :

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Définition 4. Cette dernière expression, de la forme $a(x+\alpha)^2+\beta$ s'appelle la forme canonique du trinôme

Intérêt :
– dire si le polynôme possède ou non des racines, et lesquelles s'il en a
– factoriser le trinôme lorsque ce sera possible

- connaître le signe du trinôme suivant les valeurs de x
- étudier les variations de la fonctions définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et tracer sa représentation graphique avec précision

Exemple : « Canoniser »le trinôme $x^2 - 7x + 12$.

2.2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

On a vu que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Autrement dit, résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$ i.e :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Dans cette expression, tous les facteurs sont positifs sauf Δ, d'où :

THÉORÈME 1.

1. Si $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle
2. Si $\Delta = 0$: l'équation a une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$
3. Si $\Delta > 0$: l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En effet, lorsque Δ est positif, l'équation est factorisable :

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Remarque :

- Les formules obtenues pour $\Delta > 0$ s'étendent à $\Delta \geq 0$
- Si les coefficients a et c sont de signes opposés, alors le trinôme admet deux racines ; en effet, dans ce cas $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Exercice 2.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $-6x^2 + x + 1 = 0$
3. $5x^2 + 6x + 2 = 0$
4. Répondre au problème initial
5. $x^2 - 2x = 0$
6. $x^2 - 5 = 0$

3 Factorisation du trinôme

THÉORÈME 2. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

Démonstration :

- Si $\Delta = 0$: le trinôme s'écrit, à l'aide de la forme canonique : $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ on a $a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$

Remarque : Lorsque $\Delta < 0$, comme le trinôme n'a pas de racine réelle, il faut abandonner l'espoir de pouvoir le factoriser (du moins dans $\mathbb{R}$)

4 Signe du trinôme

But : Étudier le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x.
Cas 1 - $\Delta > 0$: Soit x_1 et x_2 ses racines, avec $x_1 < x_2$. On a alors :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Établissons le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	opposé de a	0	signe de a	

Cas 2 - $\Delta \leqslant 0$: On utilise la forme canonique :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Comme Δ est négatif, l'expression entre crochets est positive, le signe de $P(x)$ est donc le même que celui de a

THÉORÈME 3. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent. En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant.

Exercice 4.1. Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

5 Fonctions polynômes

5.1 Fonction polynôme du second degré

5.1.1 Définition

Définition 5. On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction P, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des réels avec } a \neq 0$$

5.1.2 Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, notons C_P la courbe d'équat $y = P(x) = ax^2 + bx + c$

THÉORÈME 4. La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole. Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$. Son axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ et son sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

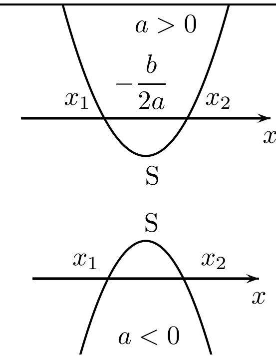
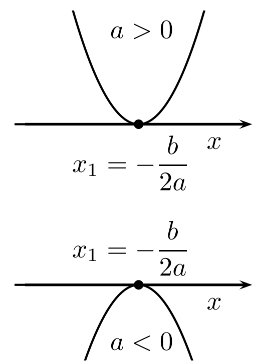
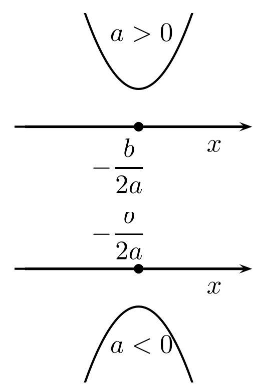
Démonstration :

D'après la forme canonique l'équation de la courbe s'écrit encore :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ce qui s'écrit encore $Y = aX^2$ dans le repère où $Y = y + \dfrac{\Delta}{4a^2}$ et $X = x + \dfrac{b}{2a}$. Ceci est donc l'équation d'une parabole.
Le signe de a conditionne donc l'orientation de cette parabole.
Comme $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$, on a : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\dfrac{\Delta}{4a^2}$. On conclut en multipliant par a suivant le signe de a

RÉSUMÉ : $f(x) = ax^2 + bx + c$ **AVEC** $a \neq 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

Racines	Signe de ax^2+bx+c	Représentation parabole	Factorisation	Δ
Deux racines x_1 et x_2 : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & s(a) & 0 & -s(a) & 0 & s(a) & \end{array}$		$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	$\Delta > 0$
Une racine : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_1 & & +\infty \\ \hline f(x) & & s(a) & 0 & s(a) & \end{array}$		$f(x) = a(x-x_1)^2$	$\Delta = 0$
Aucune racine réelle	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & s(a) & \end{array}$		pas de factorisation	$\Delta < 0$

5.2 Fonction polynôme de degré quelconque

Définition 6. On appelle fonction polynôme (à coefficients réels) de degré n) ($n \in \mathbb{N}$) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ dont l'écriture peut se ramener à la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ où } a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n \text{ sont des réels avec } a_n \neq 0$$

Le terme $a_p x^p$ s'appelle monôme de degré p. On note $n = Deg(P)$

Exemples :
- La fonction P définie par : $P(x) = x^8 - 6x^7 + 3x^2 - 5$ est une fonction polynôme de degré 8
- Toutes les fonctions puissances d'exposants entiers : $P(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ sont des fonctions polynômes de degré p.
- Les fonctions affines et constantes (différente de la fonction nulle) sont des fonctions polynômes de degré 1 et 0

Contre-exemples :
- La fonction Q définie par $Q(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$ n'est pas une fonction polynôme
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction polynôme car non définie pour $x = 1$ ou $x = -1$
- En revanche la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme de degré 2 puisque $h(x) = x^2 - 1$

Propriété 2. Deux polynômes non nuls sont égaux, si et seulement si, ces polynômes ont le même degré et les coefficients de leurs termes de même degré deux à deux égaux

Remarque : Cette propriété est admise

Exemple : Pour tout réel x, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 7x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ si, et seulement si, $a = 7$, $b = -4$, $c = 2$ et $d = 1$

Définition 7. On appelle racine d'un polynôme P tout réel λ tel que

$$P(\lambda) = 0$$

Exemple : Trouver les racines du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 1)$

Remarque :
- Les fonctions polynôme de degré 1 ($x \longmapsto ax + b$) admettent toutes une seule racine $\lambda = -\dfrac{b}{a}$
- Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle, par exemple P avec $P(x) = x^2 + 1 \geq 1$.