
Chapitre 5 : Les Limites

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

Table des matières

1	Fonction carrée	1
2	Fonction cube	1
3	Fonction racine carrée	1
4	Fonction inverse	1
5	Fonctions Puissances	2
6	Fonctions polynômes	2
7	Fonctions rationnelles	2

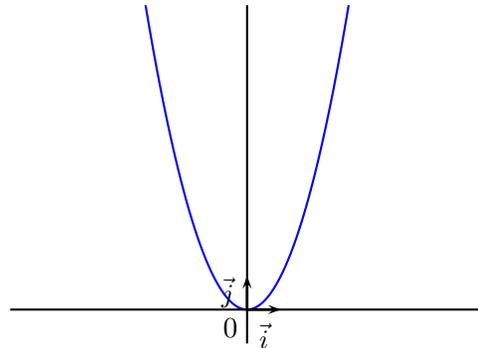
Cours : Les Limites des fonctions de références

1 Fonction carrée

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R}^+ par $f(x) = x^2$. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

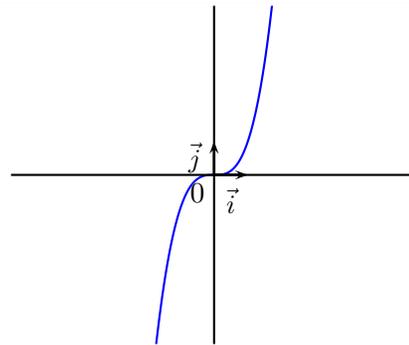


2 Fonction cube

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} par $f(x) = x^3$. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

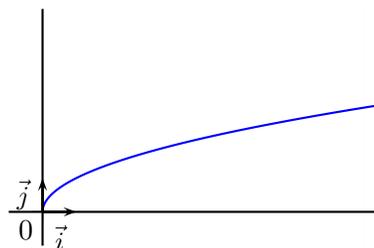


3 Fonction racine carrée

On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^+ à valeur dans \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x}$. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



4 Fonction inverse

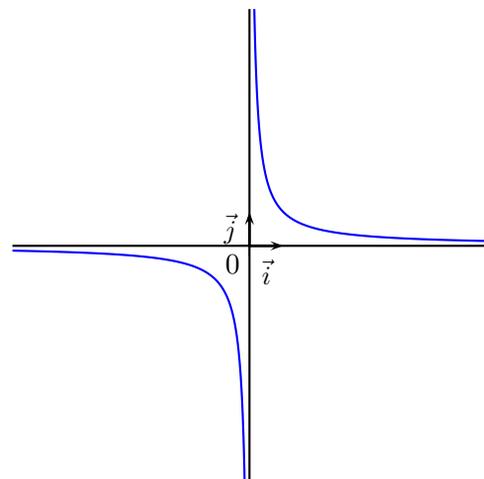
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ à valeur dans $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



5 Fonctions Puissances

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$

- Si $n > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- Si $n < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{10}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{10}} = 0$

6 Fonctions polynômes

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où $a_n \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \pm\infty$$

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3 + 2x^2 - 4x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 2x^2 - 4x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$

7 Fonctions rationnelles

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ où $a_n \neq 0$ et $b_r \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_r x^r} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_r x^r}$$

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 4x - 6}{2x^3 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2x^3 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2x^2} = 0$