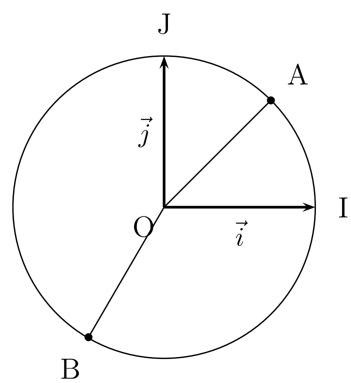
Exercices : Trigonométrie

Exercice 1. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O ci-dessous, les points A et B sont tels que :

$$\widehat{IOA} = 45^\circ \qquad \text{et } \widehat{IOB} = -120^\circ$$

Donner une mesure en radians des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$
2. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$
3. $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$



Exercice 2. Les réels $\frac{7\pi}{5}$ et $-\frac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ? Donner la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $-\frac{17\pi}{3}$

Exercice 3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{17\pi}{12}$$

Déterminer la mesure de l'angle qui appartient à $]3\pi; 5\pi]$

Exercice 4. Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle dont on donne une mesure en radians.

1. $\frac{5\pi}{4}$
2. $-\frac{4\pi}{3}$
3. $-\frac{10\pi}{3}$
4. 135π
5. $\frac{185\pi}{6}$
6. $\frac{17\pi}{13}$

Exercice 5. Calculer la valeur exacte de

1. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
2. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(\frac{79\pi}{6}\right)$

Exercice 6. ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$

AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FB}) = \dfrac{\pi}{3}$

On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés

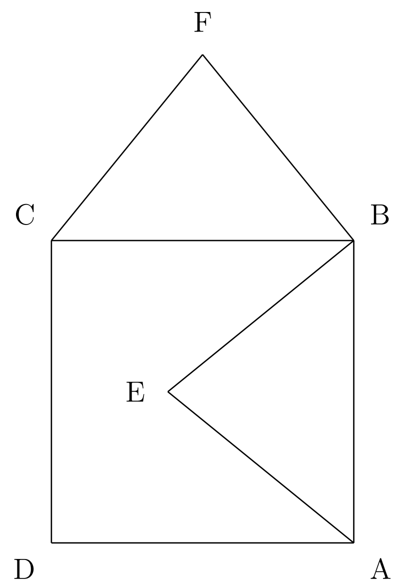
1. (a) Démontrer que le triangle ADE est isocèle

   (b) Démontrer que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \dfrac{5\pi}{12}$

2. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF})$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF})$

3. (a) Utiliser la relation de Chasles pour calculer une mesure de $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$

   (b) Conclure



Exercice 7. Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{7\pi}{8} \qquad \text{et } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{3\pi}{5}$$

Déterminer la mesure principale des angles suivants : [1]

1. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ})$
2. $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB})$
3. $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$

Exercice 8. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$
2. $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$
3. $\sin(2\theta) = \cos\theta$

Exercice 9. Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1$$

est située entre les droites d'équations $y = -3$ et $y = 1$

1. On pourra utiliser la relation de Chasles

Exercice 10.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$$

2. Résoudre, dans $]-\pi;\pi[$, les équations :
   (a) $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$
   (b) $2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

Exercice 11.

1. θ est un angle situé dans $]-\pi;\pi]$ dont on sait que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Que vaut θ (en radians) ?
2. θ est un angle de $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$. Calculer $\cos\theta$ et $\tan\theta$
3. θ est un angle de $]-\pi;0]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$. Calculer $\sin\theta$ et $\tan\theta$
4. θ est un angle de $]-\pi;0]$ tel que $\tan\theta = 2$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Exercice 12. Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}\}$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$
   En déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{9\pi}{8}$
2. Démontrer que pour $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
   En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ puis de $\sin\dfrac{\pi}{8}$
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{8}$

Exercice 13. Dans cet exercice on donne : $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

1. Soit $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

2. En déduire que :

$$\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad I =]-\pi;0]$
2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad I = [0;2\pi[$
3. $\sin x = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ $\quad I = \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$
4. $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad I = [0;2\pi[$

Exercice 15. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-2\sqrt{3};-2)$ et $B(-3;3\sqrt{3})$. Construire les points A et B [2]

Exercice 16. Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal.
A est le point de coordonnées polaires $\left(3,\dfrac{23\pi}{6}\right)$ dans le repère polaire $(O,\vec{i})$

1. Calculer les coordonnées cartésiennes du point A
2. Contrôler avec la calculatrice

Exercice 17. Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal.
M est le point de coordonnées $(-1;\sqrt{3})$

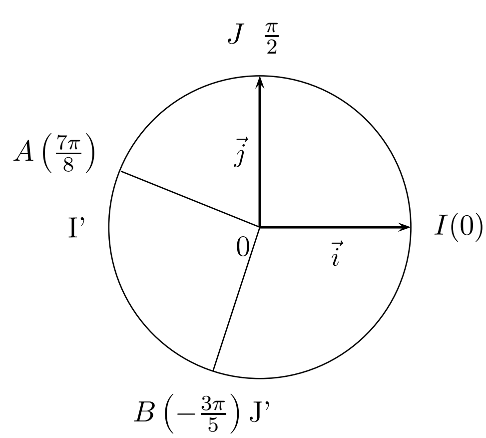
1. Déterminer un couple de coordonnées polaires (ρ,θ) dans le repère polaire $(O;\vec{i})$
2. Contrôler avec la calculatrice

Exercice 18. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A et B dont les coordonnées polaires (dans $(O;\vec{i})$) sont :

$$A(2;0) \qquad B\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$$

On considère également le point C dont les coordonnées cartésiennes sont : $C(-\sqrt{3};-1)$

1. Donner les coordonnées cartésiennes de A
2. Calculer les coordonnées cartésiennes de B
3. Calculer les coordonnées polaires de C
4. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
5. Placer, précisément, les points A, B et C sur une figure
6. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Prouver le)



Exercice 19. Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
Déterminer une équation de la sphère de centre O, passant par $A(1;2;3)$

2. Calculer un couple de coordonnées polaires de chacun des points et utiliser les deux sortes de coordonnées pour les placer avec précisions

Exercice 20. On considère un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. A est le point de coordonnées polaires (ρ,θ) avec $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ dans le repère polaire $(O;\vec{i})$

ABC est un triangle équilatéral de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$.

1. (a) Exprimer le côté du triangle ABC en fonction de ρ
   (b) Donner les mesures des angles $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$. En déduire les mesures de $(\vec{i},\overrightarrow{OB})$ et de $(\vec{i},\overrightarrow{OC})$
   (c) En déduire les coordonnées polaires de B et C dans le repère $(O;\vec{i})$
   (d) Déterminer des coordonnées cartésiennes de A, B et C
2. E est le milieu du côté $[AB]$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{OE}$ puis $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$
   (c) En déduire que :
   $$\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$
   et
   $$\sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Exercice 21. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O' et de même rayon $r = 2$ cm.
On suppose que ces deux cercles se coupent en deux points A et B avec $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{3}$

1. Quelle est la nature du quadrilatère $OAO'B$
2. Calculer la distance OO' et la distance AB
3. Calculer le périmètre et l'aire de la surface d'intersection des deux disques (délimité par les deux arcs $\widehat{AB}$)