Exercices : Limites

Exercice 1. Quelle est la limite de la fonction :

1. f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$?
2. g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$ en $-\infty$?
3. h définie sur $]2;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $+\infty$?
4. k définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$?

Exercice 2. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel non nul, $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$
2. Donner la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 3. Quelle est la limite de la fonction :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3$ en $-\infty$?
2. g définie sur $]-\infty;0]$ par $g(x) = \sqrt{-x}$ en $-\infty$?

Exercice 4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x-1}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$
2. Déterminer la limite de f en $\pm\infty$

Exercice 5. Dans chaque cas, donner la limite de la fonction en a

1. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $a = 1$
2. g est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $a = -1$
3. h est définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ et $a = 1$

Exercice 6. Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x}$

Exercice 7. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

1. Démontrer que $0 < g(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. Démontrer que g est décroissante sur $[0; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$
3. Déterminer la limite, si elle existe de la fonction g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

1. Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$
   Vérifier que 2 est racine de P, puis factoriser P par $x - 2$
2. Étudier la limite de f en 2
3. Étudier la limite de f en $-\infty$
4. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f

Exercice 9. Déterminer les limites suivantes (on justifiera en décomposant les fonctions) :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x + 3\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\sqrt{x} + x^2$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-5}{x} + x^2\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + 3x^2 - 2\right)$
5. $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{3}{x-2} + 5x - 7\right)$
6. $\lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{2}{x+2} + 2\right)$

Exercice 10. Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes (on justifiera en décomposant les fonctions et en factorisant en cas d'indétermination)

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + x$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - 2x^3 + 5x - 1$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 2x^3 + 5x - 1$

Exercice 11. Le but de cet exercice est de déterminer les limites en $+\infty$, en $-\infty$, en 3^- et en 3^+ de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 3}$$

On note $P(x) = x^2 - 4x + 2$, $Q(x) = x - 3$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant f

1. Étude en $+\infty$ et en $-\infty$
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x)$. Peut-on conclure directement pour $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?
   (b) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$ on a $f(x) = x\dfrac{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{3}{x}}$
   (c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

(d) Y-at-il une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$? Et en $-\infty$? Si oui, en donner une équation

2. Étude au voisinage de 3
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 3^+} P(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} Q(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$
   (b) Procéder de même pour $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$
   (c) En déduire une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
2. Déterminer les limites de f en 2^+ et en 2^-

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{-x + 1}{x + 3}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'asymptote horizontale dont on précisera l'équation.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$. En déduire l'existence d'asymptote verticale dont on précisera l'équation.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2 + 1}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$
4. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ