Exercices : Les Fonctions

Exercice 1. Parité
Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
2. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
3. $h(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
4. $k(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
5. $l(x) = \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$
6. $m(x) = \cos x \times \sin x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. Sens de variation
On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(x) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \dfrac{1}{2}$
3. Démontrer que $f(x) = \dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$
4. En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 3. Comparaison de deux fonctions
Le but de cet exercice est de comparer les fonctions f et g définie par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g(x) = 1 + \frac{x}{2} \text{ sur l'intervalle } [-1; +\infty[$$

1. Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1; +\infty[$
2. Calculer $f(x)^2$ et $g(x)^2$.
3. Démontrer que $f(x)^2 \leq g(x)^2$ pour tout $x \in [-1; +\infty[$
4. En déduire une comparaison entre f et g sur $[-1; +\infty[$
5. Tracer dans un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

Exercice 4. Comparaison de deux fonctions
Le but de cet exercice est de comparer les fonctions f et g définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ sur l'intervalle } \mathbb{R}$$

1. Calculer $f(x) - g(x)$ (on réduira au même dénominateur).
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \geq g$

Exercice 5. Opérations sur les fonctions

1. u et v sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = 1 - 2x$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(u + v)(x) = (x - 1)^2$
2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = 2x^2 + 3 \qquad g(x) = x^2 + 1$$
   (a) Pourquoi la fonction $\dfrac{f}{g}$ est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
   (b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2+1}$
   (c) Déterminer la fonction fg

Exercice 6. Sens de variation

1. Dresser le tableau de variation de chaque fonction f (Justifier)
   (a) $f(x) = x^2 - 1$
   (b) $f(t) = \dfrac{1}{t} + 3$
   (c) $f(x) = -2 + \sqrt{x}$
   (d) $f(x) = -\dfrac{3}{x}$
   (e) $f(x) = 2x^2$
   (f) $f(x) = -5\sqrt{x}$
2. Écrire la fonction f comme la composée de deux fonctions de référence et en déduire son sens de variation sur l'intervalle I.
   (a) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x+1}$ $I = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$
   (b) $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ $I =]-\infty; 2]$
   (c) $f : x \longmapsto (3-x)^2$ $I = [3; +\infty[$
   (d) $f : x \longmapsto (3-x)^2 + 6$ $I = [3; +\infty[$

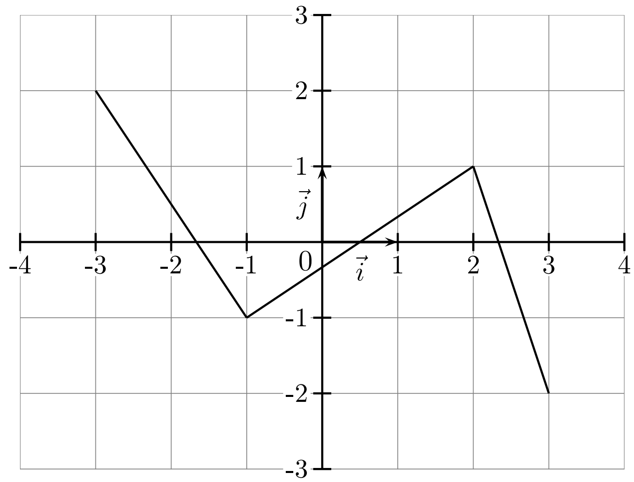
Exercice 7. Fonctions composées

1. Écrire f comme la composée de fonctions de référence :
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$
   (b) $f(x) = \sin(3x)$
   (c) $f(x) = 2(x-1)^2 + 5$
   (d) $f(x) = -4\sqrt{x} + 1$
2. Déterminer $f \circ g$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$
   (b) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \dfrac{3}{2-x}$
   (c) $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
   (d) $f(x) = -4\sqrt{x} + 1$ et $g(x) = 5x - 1$

Exercice 8. Sens de variation d'une fonction composée

Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $I =]-\infty; 3]$.

Exercice 9. Fonctions associés et courbes
On considère une fonction f définie sur $[-3;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Préciser l'ensemble de définition et représenter chacune des fonctions définies ci-dessous :

1. $f_1(x) = -f(x)$
2. $f_2(x) =\mid f(x) \mid$
3. $f_3(x) = f(x) + 1$
4. $f_4(x) = f(x+1)$

Exercice 10. Représentation graphique

1. Dans un repère, tracer soigneusement la parabole P représentant la fonction carré.
2. Dans chaque cas, en déduire comment obtenir la courbe représentant la fonction f (Vérifier a l'aide de la calculatrice) :
   (a) $f_1 : x \longmapsto x^2 - 2$
   (b) $f_2 : x \longmapsto -x^2 + 2$
   (c) $f_3 : x \longmapsto (x-3)^2 + 3$
   (d) $f_4 : x \longmapsto -(x+3)^2 - 3$

Exercice 11. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-2)$

1. Étudier la parité de la fonction f
2. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$
3. Démontrer que la fonction f est minorée par -1
4. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f (On se limitera $\grave{a}$ l'intervalle $[-1;3]$).

Exercice 12. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Étudier la parité de la fonction f
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f
4. Démontrer que la fonction f admet un maximum $M = 2$ (On pourra déterminer le signe de $f(x)^2 - 4$)

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur $[0;3]$ par : $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

1. Démontrer que $f(x) = (1-x)(x-2)$
2. Tracer soigneusement la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$
3. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 14. **Rappel** : Soit A et B deux réels. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

1. Considérons les fonctions f et g définies sur $I = [1;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

   (a) Représenter graphiquement les fonctions f et g
   (b) Que vaut le produit fg sur I ? La propriété énoncée en rappel pour des réels est-elle vraie pour des fonctions ?

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel non nul. On suppose que : $kf = 0$ sur I. Que dire de la fonction f sur I ?

Exercice 15. Le but du problème est de comparer les deux nombres suivants :

$$A = \frac{1,0000002}{1,0000004} \qquad B = \frac{0,9999996}{0,9999998}$$

1. Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$

1. Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?
2. Que vaut $f\left(10^{-7}\right)$? Que vaut $g\left(10^{-7}\right)$?

Pour comparer les nombres A et B, on va comparer les fonctions f et en étudiant la différence $f(x) - g(x)$

1. Démontrer que $f(x) - g(x) = \dfrac{12x^3}{(1+4x)(1-2x)}$
2. Résoudre l'inéquation $f(x) - g(x) > 0$
3. En déduire le signe de $f\left(10^{-7}\right) - g\left(10^{-7}\right)$.
4. Conclure

Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+ \mid x \mid}$

1. Étudier la parité de la fonction f
2. Démontrer que $f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. Tracer soigneusement la représentation graphique C_f de la fonction f.

<u>Exercice</u> 17. Fonctions irrationnelles

1. f est la fonction définie sur D par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.
   (a) Trouver D
   (b) Démontrer que $f = g \circ h$ où g est la fonction racine carrée et h une fonction à déterminer.
   (c) Vérifier que pour tout réel $x \in D$ $h(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$
   (d) En déduire les variations de h sur $]-\infty; -1]$ et sur $]1; +\infty[$
   (e) Tracer, avec la calculatrice, la courbe représentant la fonction f et contrôler les réponses données à la question (e).
2. f est la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$$

   (a) Vérifier que pour tout réel $x \in [-\pi; \pi]$ $1 - \cos x \geq 0$
   (b) Étudier les variations sur $[-\pi; \pi]$ de la fonction : $x \longmapsto 1 - \cos x$
   (c) En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$