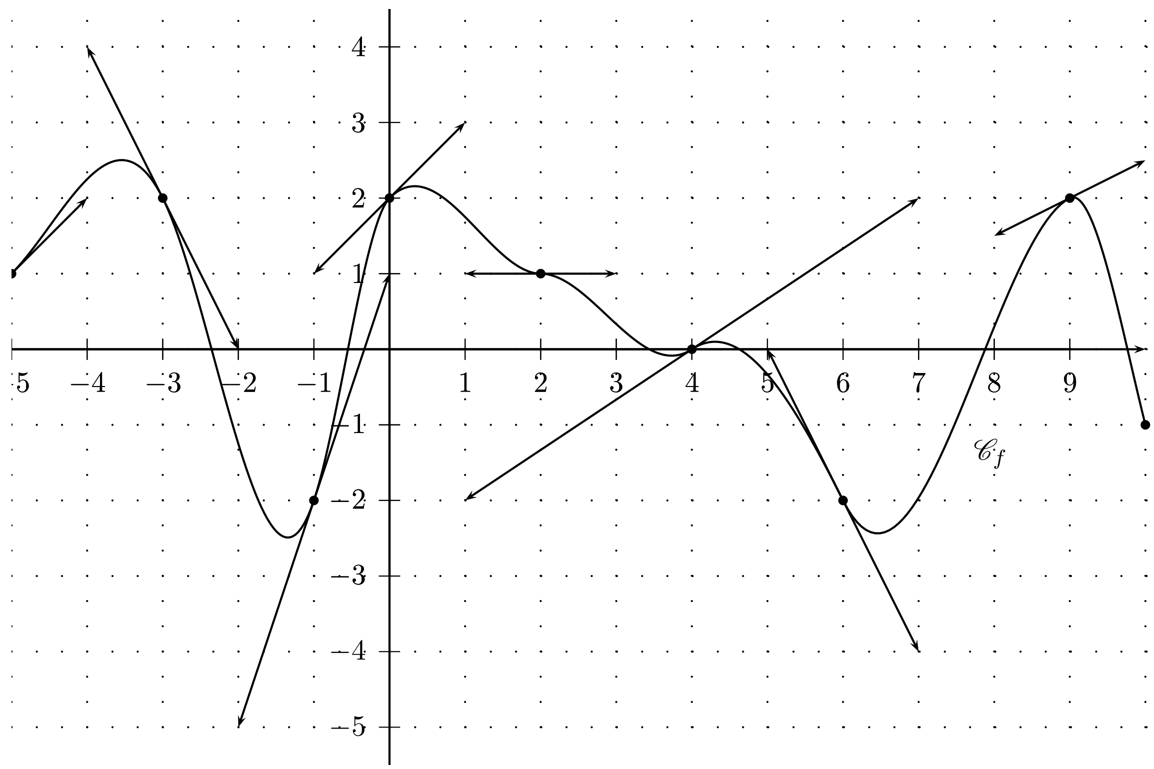
Exercices : Dérivations

Exercice 1. Quel est le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = -2x + 3$ et $a = 3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -1$
3. $f(x) = mx + p$ et $a = 2$ avec m et p deux réels
4. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $a = 2$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $a = 0$
6. $f(x) = x^3 + 1$ et $a = 3$

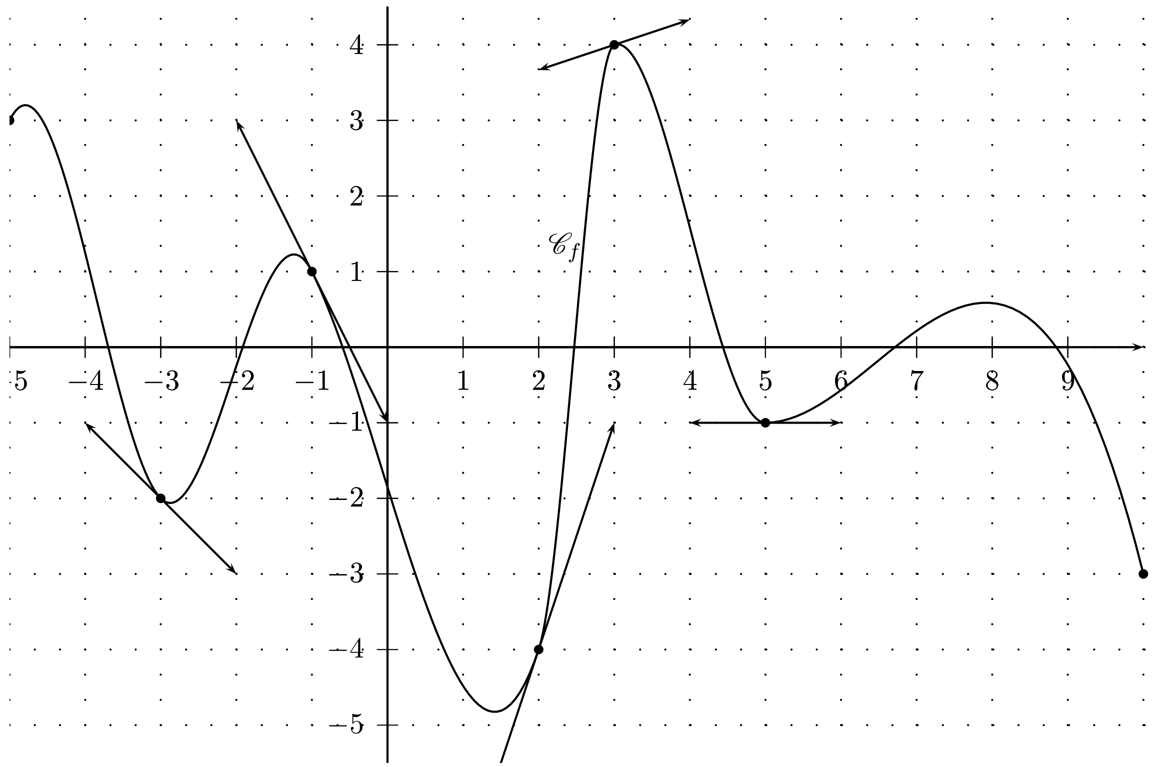
Exercice 2. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-5)$ $f'(-3)$ $f'(-1)$ $f'(0)$ $f'(2)$ $f'(4)$ $f'(6)$ $f'(9)$



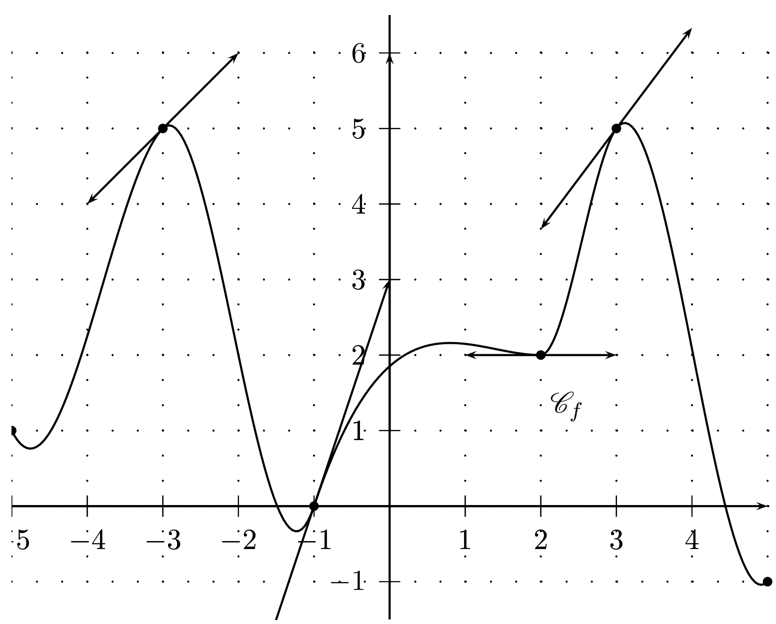
Exercice 3. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-3)$ $f'(-1)$ $f'(2)$ $f'(3)$ $f'(5)$



<u>Exercice</u> 4. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3)$$



<u>Exercice</u> 5. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

1. Vérifier que, pour $h>0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1}{h}=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

2. En déduire l'existence et la valeur de $f'(1)$

Exercice 6. Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
3. $h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
4. $k(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 7. Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
2. $g(x) = (2x+3)(3x-7)$
3. $h(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$
4. $k(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$
5. $j(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
6. $p(x) = \sin 3x$

Exercice 8.

1. (a) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sin x$ au point d'abscisse 0
   (b) Tracer T et $\mathscr{C}$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. En déduire l'approximation affine locale de $\sin h$
3. A l'aide du 2., donner une approximation de $\sin 0,01$ et comparer avec la valeur fournie par votre calculatrice.

Exercice 9. On définit sur $[0;\pi]$ les fonctions f_1 et f_2 par :

$$f_1(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \cos x$$

Démontrer que leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ admettent au point d'abscisse $\dfrac{3\pi}{4}$ des tangentes parallèles

Exercice 10. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$. On note $\mathcal{D}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f et en déduire les variations de f
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$
3. Résoudre, par calcul, l'équation $g(x) = f(x)$
4. Préciser les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{D}$
5. Tracer sur un même repère les droites T, $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B
4. Tracer sur un même repère T_A, T_B et C_f

Exercice 12. On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad\qquad g(x) = x^3 - 3x$$

1. Etude de f
   (a) Calculer la dérivée f' de f
   (b) Etudier le signe de la dérivée f'
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f
2. Etude de g
   (a) Calculer la dérivée g' de g
   (b) Etudier le signe de la dérivée g'
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction g
3. Comparaison des deux fonctions
   (a) Graphiques
      i. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (on se limitera à l'intervalle $[-2; 2]$ et on prendra un pas de $0,5$)
      ii. A l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
         A. Combien y a-t-il de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?
         B. Quelles sont leurs coordonnées ?
   (b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
      ii. En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

Exercice 13. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. Démontrer que f est une fonction impaire
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$

Exercice 14.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$

Exercice 15. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
4. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ (dans un même repère)
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près

Exercice 16. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x + 1$$

1. Déterminer l'approximation affine locale de $f(-1 + h)$
2. Démontrer que, si $h \neq 0$ est tel que $| h |< 1$, alors
$$| h^3 |< h^2$$
3. En déduire que, si h est non nul et $| h |< 1$, alors :
$$| f(-1 + h) - (5h - 2) |< 4h^2$$
4. Que peut-on dire lorsque l'on remplace $f(-1 + h)$ par son approximation affine locale ?

Exercice 17. On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\dfrac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Exercice 18. Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^{2005} - 1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h.

3. Conclure

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
2. Tracer (dans un même repère) $\mathscr{C}_f$ et cette tangente sur l'intervalle $[-1; 1,5]$

Exercice 20. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$

1. Calculer la dérivée f' puis étudier son signe
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f
3. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[-4; 0[\cup]0; 4]$

Exercice 21. Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer $f(x)$
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

4. Déduire de la question 3. que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

Exercice 22. Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^3 - 3x + 1$$

1. Etudier la partié des fonctions f et g
2. Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g
3. Calculer les dérivées f' et g'. Etudier leur signe.
4. Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g
5. Tracer les représentation graphique $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3; 3]$).
6. Résoudre, par calcul, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire)

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

1. Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+.
   Préciser les éventuelles asymptotes horizontales et verticales.

2. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f
4. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ
   (a) Déterminer trois réels, a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$
   (b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

<u>Exercice</u> 24. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$
2. Vérifier que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$
3. Etudier la limite de f quand x tend vers 0. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on précisera une équation.
4. Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ dont on précisera l'équation et étudier la position de Δ et $\mathscr{C}_f$
6. Calculer la dérivée f' de f et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1}{x^2}$
7. Etudier le signe de f' puis en déduire le tableau des variations de f

<u>Exercice</u> 25. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f

<u>Exercice</u> 26. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Unités : 1 cm par axe)

1. Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} - -1$$
4. Etudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\mathcal{D}$ dont on précisera l'équation.
5. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?

6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
8. Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et -3.
9. Tracer, dans le repère, $\mathcal{D}$, Δ, T_{-2}, T_{-3} et $\mathscr{C}_f$. (On se limitera à $[-10; -1[\cup] - 1; 6]$)

Exercice 27. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1+ \mid x \mid}$$

Etudier la dérivabilité de f en 0

Exercice 28. Une parabole P admet, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées $(O; \vec{j})$ au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec $(O; \vec{i})$

Exercice 29. On a admis, dans le chapitre 3, que « deux polynômes sont égaux »si et seulement si « ils ont même degré et mêmes coefficients ». Cela revient à dire qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Voici une démonstration de ce résultat dans le cas $n = 5$
On pose $P : x \longmapsto a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ où a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 et a_0 sont des réels.
On suppose que pour tout x, $P(x) = 0$

1. En déduire que $a_0 = 0$
2. Déterminer la fonction $f = P'$ et en déduire que $a_1 = 0$
3. Déterminer la fonction $g = f'$ et en déduire que $a_2 = 0$
4. Démontrer aussi que, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ et $a_5 = 0$