Exercices : Barycentre

Exercice 1. Dans chaque cas :
- Préciser si le barycentre de G de $\{(A,a);(B,b)\}$ existe
- S'il existe, caractériser G par une égalité vectorielle et le construire

1. $a=3$ et $b=2$
2. $a=0$ et $b=5$
3. $a=-4$ et $b=1$
4. $a=-2$ et $b=2$
5. $a=-1$ et $b=3$
6. $a=-\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{3}{2}$

Exercice 2. Dans un repère du plan, on donne les points :

$$A\left(1;\frac{1}{2}\right)\ ,\ B\left(\frac{3}{2};2\right)\ \text{et}\ C\left(-1;-\frac{11}{2}\right)$$

1. Démontrer que A, B et C sont alignés
2. Déterminer les réels a et b tels que C soit le barycentre de $\{(A,a);(B,b)\}$ avec $a+b=1$

Exercice 3.
1. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\ 5\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}\ \|=22$
2. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\ 5\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}\ \|=\|\ 7\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}\ \|$
3. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\ -\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}\ \|=12$
4. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\ 2\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MB}\ \|=\|\ 20\overrightarrow{MA}-11\overrightarrow{MB}\ \|$

Exercice 4.
1. Construire le point G barycentre de $\{(A,1000);(B,-2000)\}$ avec $AB=6$
2. Construire le point G barycentre de $\{(D,51);(C,85)\}$ avec $CD=6$
3. Construire le point G barycentre de $\{(N,-44);(P,-11)\}$ avec $NP=10$
4. Construire le point G barycentre de $\{(S,-100);(R,75)\}$ avec $RS=6$

Exercice 5. B est le milieu de $[AC]$. Démontrer que le barycentre de $\{(A,1);(C,3)\}$ est confondu avec celui de $\{(C,2);(B,2)\}$

Exercice 6. A et B sont deux points distincts du plan.
1. Construire le barycentre G de $\{(A,1);(B,2)\}$
2. Construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$$

Exercice 7. Étant donné un triangle ABC et k un réel non nul, on définit les points D et E par les relations :

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure illustrant ces données lorsque $k = \dfrac{1}{3}$, puis lorsque $k = -1$
2. Démontrer que D est le barycentre de
$$\{(A, 1-k); (B, k)\}$$
3. Démontrer que E est le barycentre de $\{(C, 1-k); (A, k)\}$
4. En déduire que pour tout point M du plan, on a :
$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{CB} = 2\left(\overrightarrow{MB'} + k\overrightarrow{B'C'}\right)$$ où B' et C' sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$
5. Soit I le milieu de $[DE]$, déduire de la question précédente que I', B' et C' sont alignés.

Exercice 8. Dans un repère de l'espace, on donne les points $A\,(3;1;1)$ et $B(1;3;0)$. Calculer les coordonnées du barycentre G de $\{(A,1);(B,3)\}$

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 8$ cm et $BA = 5$ cm. Soit I le milieu de $[BC]$

1. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$. Démontrer que F est le barycentre de A et B affectés de réels $\grave{a}$ déterminer.
2. P étant un point du plan, réduire chacun des sommes vectorielles suivantes :
   (a) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$
   (b) $-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$$\left\| \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right\|$$

Exercice 10. Soit A et B deux points distincts du plan et $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. Démontrer :

$$G \in [AB] \iff \alpha \text{ et } \beta \text{ sont de mêmes signes}$$

Exercice 11. ABC est un triangle. Construire le barycentre des points pondérés donnés suivants :

1. $\{(A,-1);(B,1);(C,2)\}$
2. $\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$
3. $\{(A,-2);(B,3);(C,-4)\}$
4. $\left\{\left(A,\dfrac{2}{3}\right);\left(B,\dfrac{1}{2}\right);(C,-1)\right\}$

Exercice 12. $ABCD$ est un tétraèdre, G est le point défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

1. Exprimer G comme barycentre de B, C, D affectés de coefficients *à* préciser.
2. Justifier l'appartenance de G au plan (BCD).

Exercice 13. $ABCD$ est un quadrilatère et $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,3);(D,4)\}$. Construire G

Exercice 14. Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et $G = bar\{(A,-2);(B,-2);(C,15)\}$. Démontrer que G, C et E sont alignés.

Exercice 15. ABC est un triangle. On définit les points I, J et K par :

$$\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC} \text{ , } \overrightarrow{CJ} = k\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AB} \text{ } \textit{où } k \in \mathbb{R}$$

On note G l'isobaycentre de A, B et C

1. Faire une figure dans le cas $k = \dfrac{1}{3}$
2. Démontrer que G est l'isobarycentre de I, J et K

Exercice 16. $ABCD$ est une pyramide *à* base carrée $BCDE$. On note G l'isobarycentre de A, B, C, D et E.
On note O le centre du carré $BCDE$ (i.e l'intersection des diagonales (CE) et (BD))

1. Démontrer que O est l'isobarycentre de $BCDE$.
2. Démontrer que G est le barycentre de $(O,4)$ et $(A,1)$.
3. Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de $[CD]$. Démontrer que $G \in (G_1I)$

(*Pour cet exercice, une figure est recommandée*)

Exercice 17. ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm. E est le point tel que :

$$4\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$$

1. Exprimer E comme barycentre des points A, B et C affectés de coefficients *à* préciser.
2. En déduire que E appartient *à* la médiatrice de $[AC]$.
3. Calculer la distance BE

Exercice 18. $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace.

1. Construire le barycentre G de $\{(A,1);(B,2);(C,-1);(D,2)\}$
2. I est le milieu de $[BD]$. Démontrer que les droites (AC) et (GI) sont parallèles.