Chapitre 5 : Les Limites

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

Dernière modification : 14 janvier 2010

Table des matières

Cours : Les Limites

1 Approche Intuitive

1.1 Calculatoire

Considérons la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x-4}{x-1}$$

– Calculons les valeurs de $f(x)$ (on arrondira à 10^{-2} près par défaut) lorsque x devient de plus en plus grand :

x	2	5	10	50	100	1000	10000	100000
$f(x)$	2	$2,75$	$2,89$	$2,98$	$2,99$	$2,99$	$2,99$	$2,99$

On constate que lorsque les nombres x deviennent de plus en plus grands, les nombres $f(x)$ s'approchent aussi près que voulu du nombre 3.
On dira que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 3

– Calculons maintenant les valeurs de $f(x)$ lorsque la variable x s'approche de plus en plus de la valeur interdite 1 :

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,2	1,5	2
$f(x)$	5	8	13	103	1003	10003	V.I	-9997	-997	-97	-7	-2	1	2

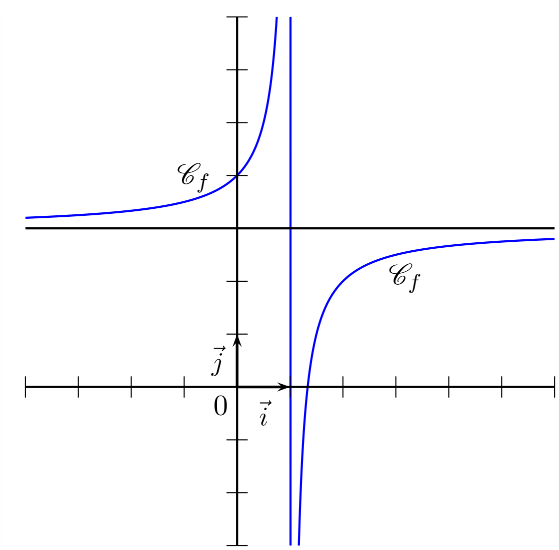
On constate cette fois que, selon le côté dont on s'approche de la valeur interdite 1 (droite ou gauche), les nombres $f(x)$ n'ont pas du tout le même comportement (puisque à gauche de 1 les nombres $f(x)$ sont de plus en plus proche de $+\infty$ tandis qu'à droite de 1 ils se rapprochent de $-\infty$.
On dira que la fonction f n'a pas de limite en 1
Cependant on nuancera de la manière suivante :

La limite de f en 1 à **gauche** est égale à $+\infty$

La limite de f en 1 à **droite** est égale à $-\infty$

1.2 Graphique

Évidemment toutes ces considérations calculatoires peuvent avoir un appui graphique :



On constate graphiquement que :
- $\mathscr{C}_f$ se rapproche de la droite d'équation $y=3$ en $+\infty$ et en $-\infty$: on dit donc que :
  la limite de f en $\pm\infty$ est égale à 3
- De même $\mathscr{C}_f$ se rapproche de la droite d'équation $x=1$ à gauche de la valeur interdite, on dit donc que :
  la limite à gauche de f en 1 est égale à $+\infty$
- De même $\mathscr{C}_f$ se rapproche de la droite d'équation $x=1$ à droite de la valeur interdite, on dit donc que :
  la limite à droite de f en 1 est égale à $-\infty$

2 Définition

2.1 Limites en $+\infty$

On considère une fonction f au moins définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$

Définition 1 : *Intuitives*

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, alors si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :

- grands [a] on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- grands en valeurs absolues mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- proches [b] d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

---

a. Par l'expression de « de plus en plus grands »il faut comprendre aussi grands que voulu

b. Par l'expression de « de plus en plus proches »il faut comprendre aussi proches que voulu

Définition 2 : *Plus rigoureuses*

- Si pour tout réel positif ε, il existe un réel η tel que :

$$x > \eta \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

  alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout réel négatif ε, il existe un réel η tel que :

$$x > \eta \Longrightarrow f(x) < \varepsilon$$

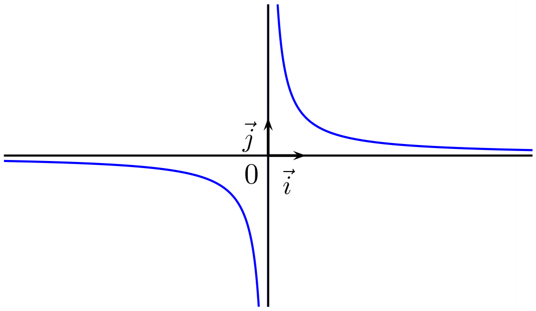
  alors on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Si pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel η tel que :

$$x > \eta \Longrightarrow f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$$

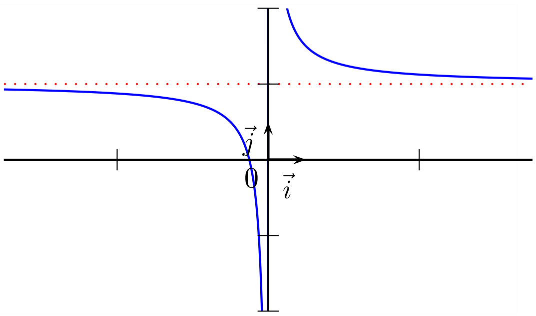
  alors on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Exemples :

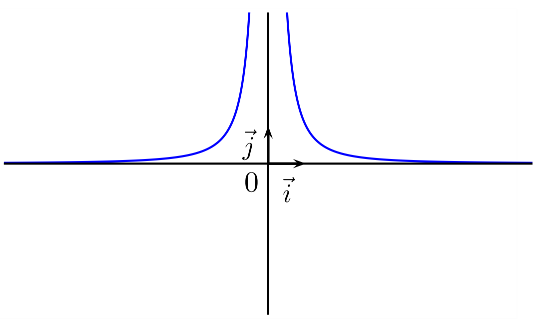
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$



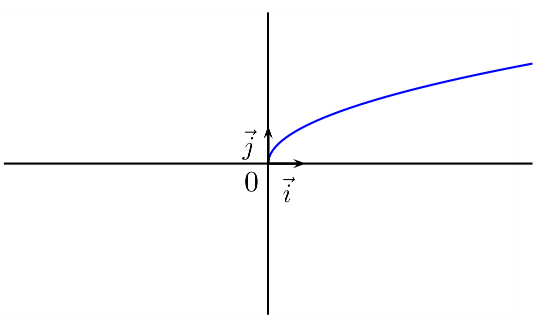
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$



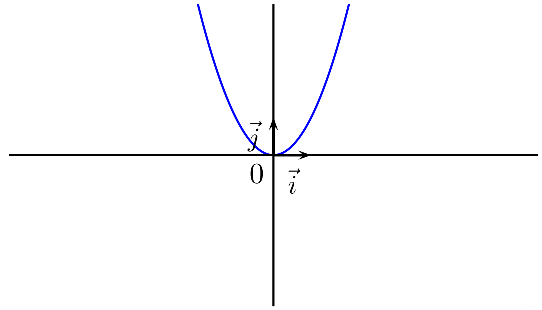
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$



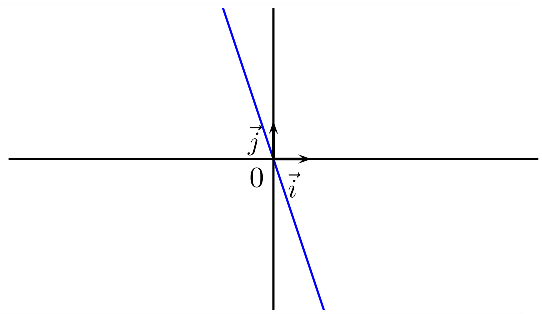
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



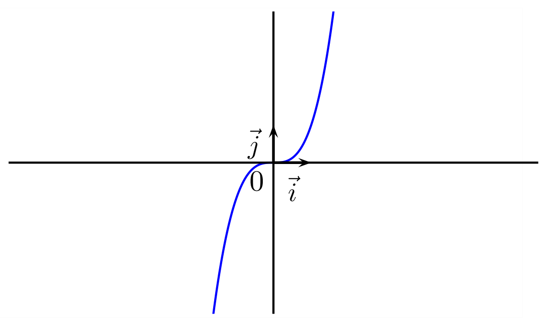
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



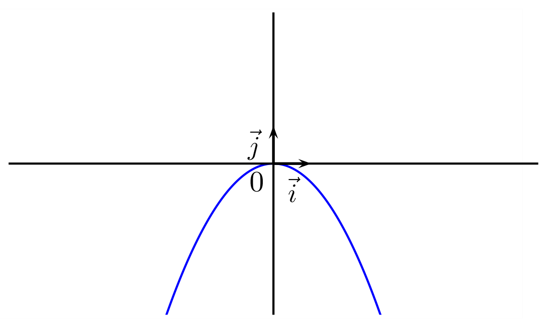
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$



On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

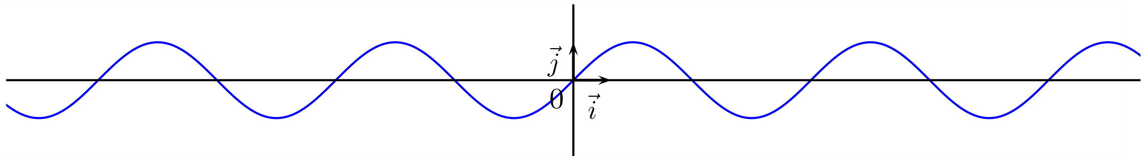


On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2} = -\infty$



Contre-Exemple :

Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$, c'est le cas de la fonction sin :



2.2 Limites en $-\infty$

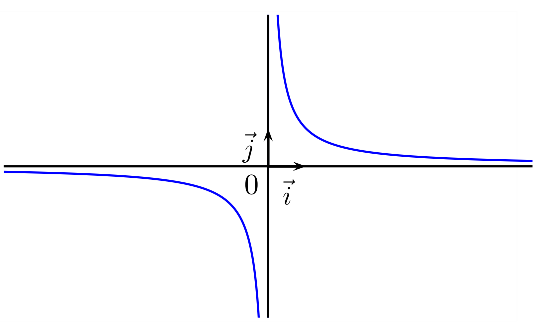
On considère une fonction f au moins définie sur un intervalle du type $]-\infty; a]$

Définition 3 : *Intuitives*

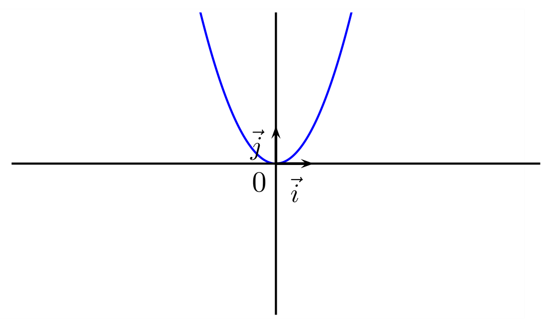
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues mais négatives, alors si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- grands en valeurs absolues mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Exemples :

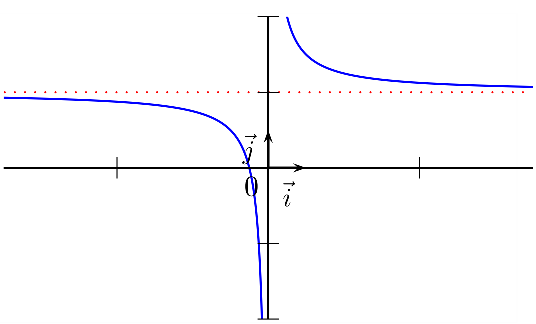
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$



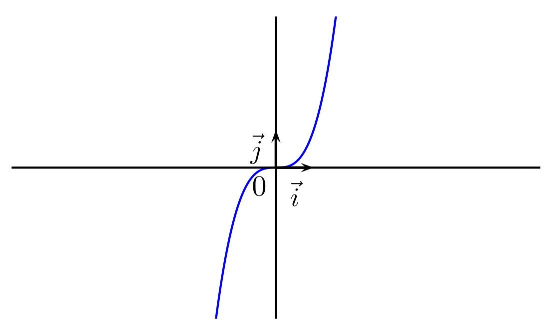
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$



On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

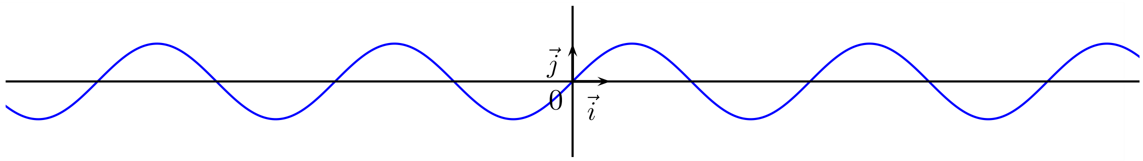


On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$



Contre-Exemple :

La fonction sin n'admet pas non plus de limite en $-\infty$:



2.3 Limites en a où $a \in \mathbb{R}$

On considère une fonction f définie sur un domaine contenant a ou sur un domaine dont a est une borne

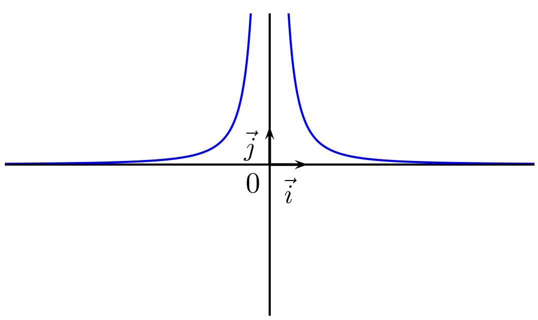
Définition 4 : *Intuitives*

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, alors si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :

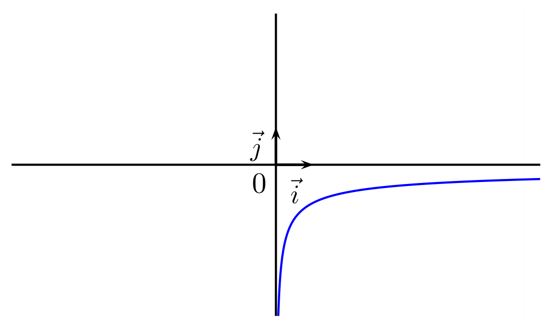
- grands on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
- grands en valeurs absolues mais négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
- proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en a et on note $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Exemples :

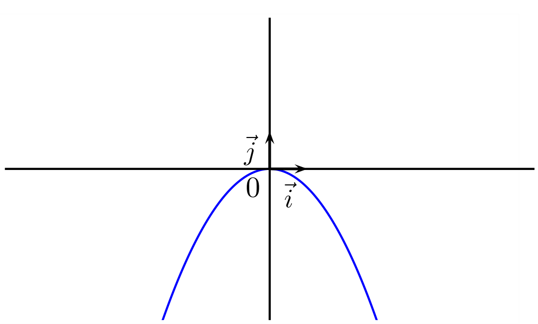
On a $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



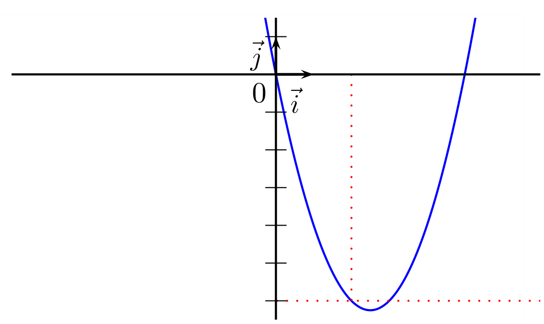
On a $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$



On a $\lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{2} = 0$



On a $\lim_{x \to 2} x^2 - 5x = -6$



Contre-Exemple :
Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en a, c'est le cas de la fonction inverse, voir le paragraphe suivant :

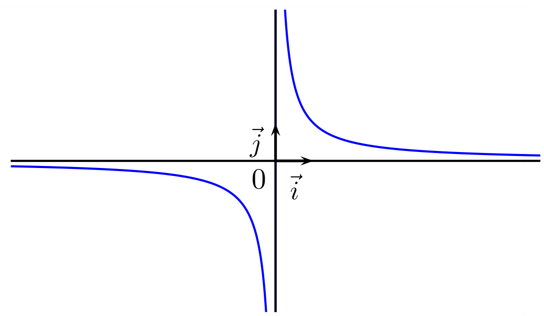
2.4 Limites à droite et limite à gauche

Remarque : La fonction inverse n'a pas de limite en 0, car si x s'approche de 0, les nombres $\dfrac{1}{x}$ n'entrent pas dans le cadre de la définition donnée au paragraphe 2.3.
Cependant, on peut parler de limite « à droite »et de limite « à gauche » : on note alors 0^+ pour signifier que x s'approche de 0 par valeur supérieure et O^- pour signifier que x s'approche de 0 par valeur inférieure.

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



Exercice 2.1. On donne les fonctions f, g, h et k définies ci-dessous :

- $f(x) = x^2 + 1$
- $g(x) = -2x^3 + 5$
- $h(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$
- $k(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) =$
7. $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) =$
8. $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) =$
9. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) =$
10. $\lim\limits_{x \to 1^+} k(x) =$
11. $\lim\limits_{x \to 1^-} k(x) =$

Dans cet exercice, on utilise par exemple le fait que si deux fonctions f et g ont pour limite a et b alors la somme $f+g$ a pour limite $a+b$. Quand est-il du produit et du quotient de deux fonctions ? La partie suivante « opérations sur les limites »précisent le champs de validité de ces raisonnements.

3 Opérations sur les limites

Le point d'interrogation signifie « forme indéterminée », on ne peut pas donner de réponse dans le cas général, cela dépend des situations.

3.1 Limites d'une somme

On considère les fonctions f et g ayant des limites finies ou infinies, la fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau suivant :

lim g \ lim f	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Exercice 3.1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x^2}-1\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-5)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+3x-4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-5)$

Remarque : Dans le dernier cas, on trouve une forme indéterminée, on pourra lever l'indétermination en se ramenant à un produit. Mais voyons tout d'abord comment calculer la limite d'un produit.

3.2 Limites d'un produit

On considère les fonctions f et g ayant des limites finies ou infinies, la fonction produit fg admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau suivant :

lim g \ lim f	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l\times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $l=0$ et si $l'\in\mathbb{R}$ alors le produit fg tend vers 0

Exercice 3.2. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^2)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x(x-3))$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}(3x+\sqrt{x})\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-5)$

3.3 Limites d'un quotient

On considère les fonctions f et g ayant des limites finies ou infinies, la fonction produit $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau suivant :

lim g \ lim f	l	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

Si $l'=0$ et si $l\neq 0$ alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ tend vers $\pm\infty$

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

$$« \ 0 \times \infty \ » \qquad « \ \frac{0}{0} \ » \qquad « \ \frac{\infty}{\infty} \ » \qquad « \ \infty - \infty \ »$$

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

Exercice 3.3. Déterminer les limites suivantes :

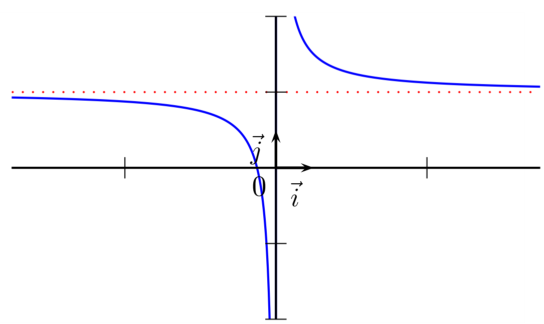
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3}{2x^2 + 3} \right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x(x-2)} \right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}(3x + \sqrt{x}) \right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

4 Asymptotes

4.1 Asymptote horizontale

Définition 5 :
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$), on dit que la droite d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$)

Exemple :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x} \right) = 2$, donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$

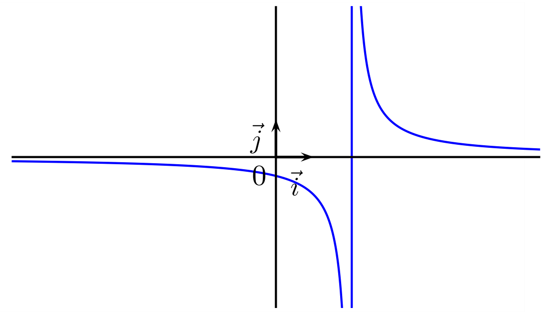


4.2 Asymptote verticale

Définition 6 :
Si une fonction f admet une limite infinie à gauche ou à droite en un réel a, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$

Exemple :

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$ (et $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$), donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=2$



4.3 Asymptote oblique

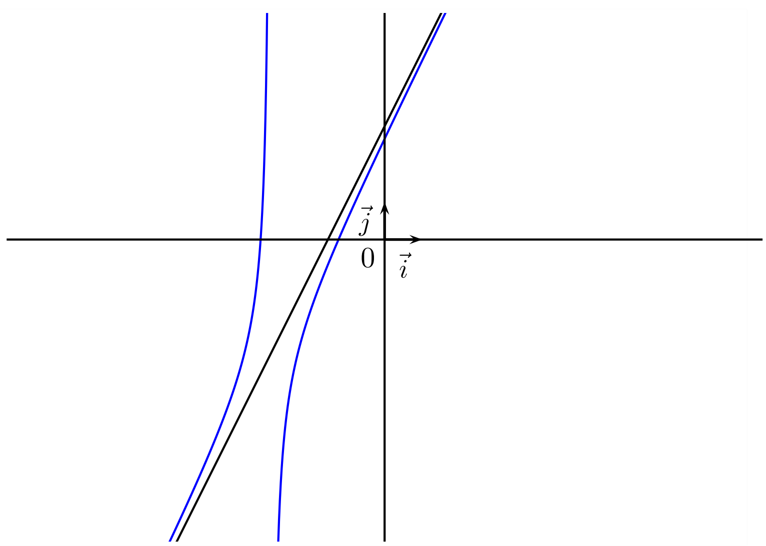
Définition 7 :

La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote à la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f en $\pm\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

Exercice 4.1. On note $f(x)=\dfrac{2x^2+9x+8}{x+3}$

1. Démontrer que $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{x+3}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x+3)]$
4. En déduire que la droite Δ d'équation $y=2x+3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$



5 Théorème de comparaison

5.1 Théorème de majoration, minoration

Théorème 1 : *Admis*

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$:

- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

<u>Exercice</u> 5.1.

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (Poser $v(x) = -x + 1$)
2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ (Poser $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$)

5.2 Théorème des gendarmes

Théorème 2 : *Admis : Théorème des gendarmes*

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$.

Si pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

<u>Exercice</u> 5.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (Poser $u(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$).