Chapitre 12 : Homothéties

D. Zancanaro C. Aupérin

2009-2010

"Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous" Thurston Moore

Dernière modification : 27 mars 2010

Table des matières

Cours : Homothéties

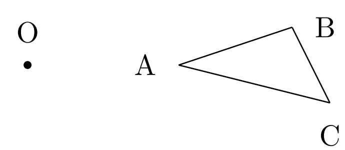
1 Généralités

Définition 1 :
On appelle homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) la transformation pour laquelle un point M du plan a pour image M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

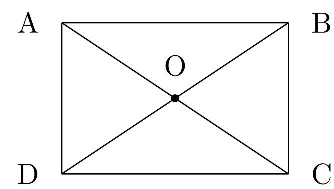
Exemple :
Dans chacun des cas ci-dessous, construire l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport k. Préciser également s'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction.

Remarque : On écrira, dans chaque cas des relations du type $\overrightarrow{OA'} = 1,5\overrightarrow{OA}$

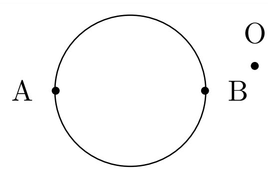
Cas 1 : $k = 1,5$



Cas 2 : $k = \dfrac{1}{2}$



Cas 3 : $k = -2$



Théorème 1 :
Le centre O, d'une homothétie, un point M et son image M' sont ....

Preuve
Par définition, la relation $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont .... i.e que les droites ...... et ...... sont .... i.e que les points O, M et M' sont ....

Théorème 2 :
Si une homothétie de centre O et de rapport k transforme M en M' et N en N', alors on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

Preuve
Par la relation de ...., en introduisant le point O on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\ldots} + \overrightarrow{\ldots N'} = k\overrightarrow{MO} + \ldots \cdots = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{\ldots N}) = k\overrightarrow{MN}$$

Corollaire 1 :
1. Une homothétie de centre O et de rapport k transforme une droite en une droite ....
2. Une homothétie de centre O et de rapport k multiplie les distances par ....

Preuve
1. D'après le théorème précédent, Si une homothétie de centre O et de rapport k transforme M en M' et N en N' alors :

   ....

   ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{\ldots N'}$ sont .... i.e que les droites ...... et ...... sont ....
2. Comme $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ alors $M'N' = \mid k \mid MN$

Définition 2 : *Rappel*
Deux triangles T et T' sont semblables si l'un est l'agrandissement de l'autre i.e si les longueurs des côtés de T sont k fois celle des côtés de T' où $k > 0$

Exercice 1.1 :
Démontrer qu'une homothétie transforme un triangle en un triangle semblable

Solution : Considérons l'homothétie h de centre O et de rapport k qui transforme le triangle ABC en $A'B'C'$ D'après le théorème 2. on a :

$$\overrightarrow{A'B'} = \ldots\ldots\ldots \qquad \overrightarrow{B'C'} = \ldots\ldots\ldots \qquad \text{et } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce qui prouve que :

$$A'B' = \mid k \mid AB \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les côtés des triangles sont donc ...., ce qui signifie que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont ....

2 Propriétés

Propriété 1 :

1. **Conservation** :
   - L'homothétie **ne conserve pas** les distances
   - L'homothétie conserve : l'alignement, les angles (et en particulier l'angle droit), le milieu d'un segment, les relations de colinéarité.
2. **Action sur les figures** :
   - Une homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) transforme :
     - une droite d en une droite d' parallèle à d
     - un segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ parallèle tel que $M'N' = \mid k \mid MN$
     - un cercle $\mathscr{C}$ de rayon R en un cercle $\mathscr{C}'$ de rayon $\mid k \mid R$.
     - un triangle (isocèle, rectangle, équilatéral) en un triangle de même nature.
     - un quadrilatère (parallélogramme, losange, rectangle, carré) en un quadrilatère de même nature.

Remarque : Certaines homothéties sont des transformations déjà connues, c'est ce qui se passe pour certaines valeurs du rapport k. Considérons une homothétie h de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) et un point M du plan. Notons M' son image.

1. Si $k = 1$, on a par définition $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$, donc $M = M'$. On dit alors que h est <u>l'identité</u>
2. Si $k = -1$, on a alors $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM}$, donc O est le .... du segment $[MM']$ donc h est la .... de centre O
3. Si $\mid k \mid > 1$ l'homothétie réalise un ....
4. Si $\mid k \mid < 1$ l'homothétie réalise une ....

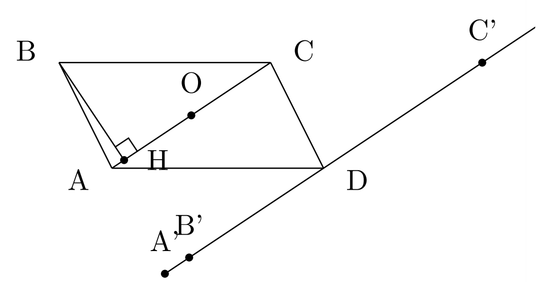
Remarque : L'unique point fixe d'une homothétie différente de l'identité est son centre.

3 Deux exercices corrigés pour mieux comprendre

<u>Exercice 3.2</u> **:**

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit les points suivants :
- A' le symétrique de B par rapport à A
- B' le symétrique de B par rapport à (AC)
- C' le symétrique de B par rapport à C

Démontrer que les quatre points A', B', C' et D sont alignés

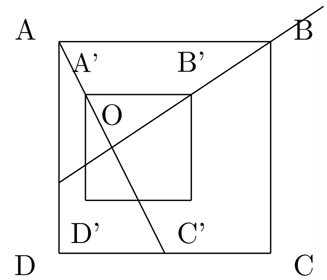


<u>**Solution**</u> **:** Notons H le projeté orthogonale de B sur $[AC]$ et O le centre du parallélogramme. Les points A, H, O et C sont alignés sur la droite (AC). De plus on a :
- A' est le symétrique de B par rapport à A, on a : $\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{BA}$
- B' est le symétrique de B par rapport à (AC), on a : $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BH}$

– O est le centre du parallélogramme, on a : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$
– C' est le symétrique de B par rapport à C, on a : $\overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BC}$

Par conséquent l'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme les points A, H, O et C en A', B', D et C'. Comme une homothétie conserve l'alignement, les points A', B', D et C' sont alignés.

Exercice 3.3 :
Les carrés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont des côtés deux à deux parallèles, comme sur la figure ci-contre. Les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont-elles concourantes ?

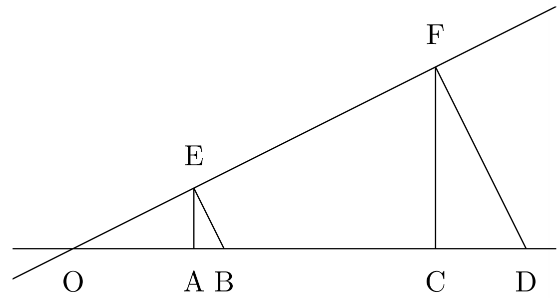


Solution : On considère le point O, intersection des droites (AA') et (BB'). On souhaite savoir si ce point est aussi sur (CC') et (DD').

1. Montrons que l'homothétie de centre O qui transforme A en A', transforme B en B'
   Considérons l'homothétie h de centre O qui transforme A en A'. On a alors :
   $$h(A) = A' \Longleftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \qquad \text{où } k = \frac{OA'}{OA}$$
   Comme $(A'B')//(AB)$ on applique le théorème de Thalès dans le triangle OAB et on obtient :
   $$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$
   Par conséquent $OB' = kOB$, et comme les points O, B' et B sont alignés dans cet ordre :
   $$\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$$
   On vient de montrer que $B' = h(B)$.
2. Montrons que h transforme C en C' et D en D'
   On a vu dans la question précédente que $A'B' = kAB$, de plus comme les carrés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont des côtés deux à deux parallèles, les longueurs de leurs côtés sont aussi proportionnelles et on a :
   $$\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC} \qquad \text{et } \overrightarrow{A'D'} = k\overrightarrow{AD}$$
   D'après le théorème 2., le point $h(C)$ est tel que : $\overrightarrow{B'h(C)} = k\overrightarrow{BC}$, par conséquent :
   $$\overrightarrow{B'h(C)} = \overrightarrow{B'C'} \Longleftrightarrow h(C) = C'$$
   De même, d'après le théorème 2., le point $h(D)$ est tel que : $\overrightarrow{A'h(D)} = k\overrightarrow{AD}$, par conséquent :
   $$\overrightarrow{A'h(D)} = \overrightarrow{A'D'} \Longleftrightarrow h(D) = D'$$
3. Concluons ! ! :
   D'après le théorème 1. O, C et C' sont alignés donc
   $$O \in (CC')$$
   De même O, D et D' sont alignés donc
   $$O \in (DD')$$
   Par conséquent les droites sont concourantes en O

4 Applications

Exercice 4.4 :
Dans la figure ci-contre, les droites (AE) et (CF) sont parallèles, ainsi que les droites (BE) et (DF). Quelle est l'image du point B par l'homothétie de centre O qui transforme A en C ? *(Justifier)*



Exercice 4.5 :
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point de $\mathscr{C}$. Construire l'image du cercle $\mathscr{C}$ par l'homothétie :

1. de centre O et de rapport $\dfrac{3}{4}$
2. de centre O et de rapport -2 ‘
3. de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$
4. de centre A et de rapport -1
5. de centre A et de rapport 1
6. de centre O et de rapport -1

Exercice 4.6 :
Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments parallèles de longueurs différentes, avec $(AB) \neq (CD)$.

1. Construire le centre Ω_1 de l'homothétie h_1 qui transforme A en C et B en D.
2. Soit h_2, différente de h_1, qui transforme $[AB]$ en $[CD]$, construire son centre Ω_2.
3. Si $AB = 3$ et $CD = 4.5$, quels sont les rapports de h_1 et h_2 ?

Exercice 4.7 :
$\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre $[AB]$. A tout point M de $\mathscr{C}$ distinct de A et B, on associe le centre de gravité G du triangle ABM.
Quel est le lieu du point G lorsque M décrit $\mathscr{C}$ privé de A et B ? *(Utiliser les homothéties)*

« Chaque fois que j'écoutais Banshee Beat d'Animal Collective, je prenais conscience que l'homme n'était pas simplement destiné à répandre la souffrance et la laideur sur le monde. Il pleuvait, il tombait des cordes, mais cette musique frôlait le miracle. Il y avait un moment où forcément l'on posait son verre et où l'on commençait à danser – en remerciant Dieu de ne connaître ni guerres ni famines etc. –, à se déhancher, à laisser poindre un sourire de satisfaction. »

Philippe Dijan, écrivain