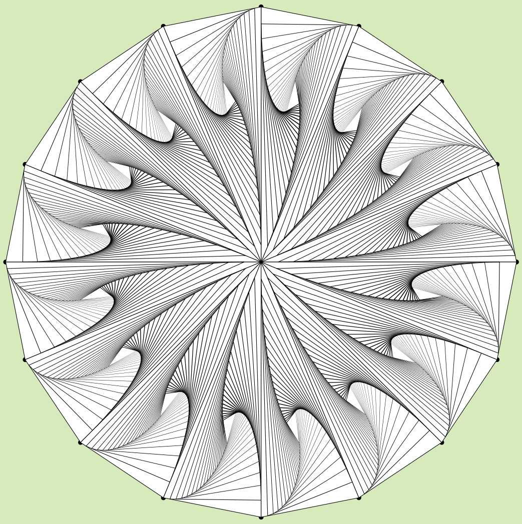
Chapitre 10

L'espace



Hors Sujet

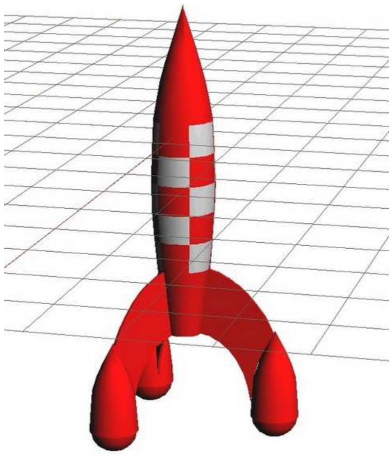
Titre : « Flower Chucker »
Auteur : Banksy
Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.
Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.
Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.
Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D.Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* » Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 10



Les vecteurs dans L'espace

Résumé Nous allons développer dans cette leçon une des grandes nouveautés : le lien entre algèbre et géométrie, deux domaines jusqu'ici étrangers. On exploite pour cela nos connaissances nouvelles sur les vecteurs. L'an prochain on exploitera le produit scalaire, et l'année d'après vous verrez qu'un « ensemble de vecteurs »dans lequel on peut définir un produit scalaire est appelé espace euclidien.

I) Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace.

I-1 Vecteurs colinéaires, parallélisme et alignement

Définition 1 :

Les vecteurs non nuls, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles

Remarque : Cela signifie que les deux vecteurs ont la même direction. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$

Théorème 1 :

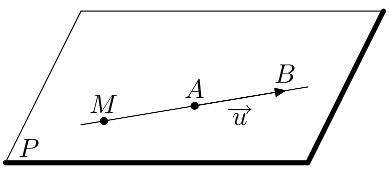
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Remarque : La colinéarité est utile pour démontrer que :

1. deux droites sont parallèles
2. trois points sont alignés : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si A, B et C sont alignés.

Théorème 2 :

On considère A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires i.e des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, x étant un réel quelconque.



Exercice 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de l'arête $[FG]$.

1. Déterminer le point M tel que :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$
2. Démontrer que
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$

Exercice 2 :

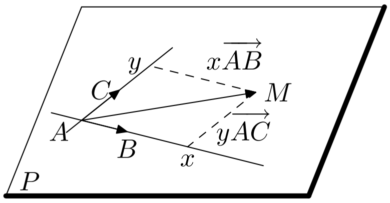
$ABCDIJKL$ est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer que J, D et G sont alignés

I-2 Vecteurs coplanaires

Théorème 3 :

A, B et C sont trois ponts de l'espace non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \qquad x \text{ et } y \text{ étant des réels quelconques}$$



Remarque : On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC)

Preuve

$\Rightarrow$ Montrons que si $M\in(ABC)$ alors $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ x et y étant des réels quelconques
Comme A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et forment une base du plan (ABC) et donc $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC). Par conséquent, si M est un point du plan (ABC) il existe un unique couple de réels tel que :

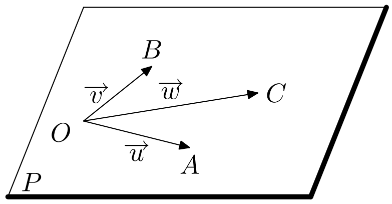
$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$\Leftarrow$ Montrons que si $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ x et y étant des réels quelconques alors $M\in(ABC)$
Puisque, $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC), il existe dans ce plan un unique point N de coordonnées $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}\iff M=N$, on a donc

$$M\in(ABC)$$

Définition 2 :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si on peut trouver trois représentants de ces vecteurs situées dans un même plan.



Remarque :

1. Attention, le fait qu'initialement les premiers représentants choisis ne soient pas dans un même plan n'empêche absolument pas les vecteurs d'être coplanaires. Cela signifie seulement que l'on n'a pas choisi les "bons" représentants. Par exemple, dans un cube, ABCDEFGH, les points A, B, C, G, et H ne sont pas coplanaires mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont coplanaires. Il suffit pour s'en apercevoir de changer de représentant pour le vecteur $\overrightarrow{GH}$ et prendre le vecteur $\overrightarrow{CD}$.
2. En revanche, si on a utilisé 4 points seulement, pour écrire des représentants des trois vecteurs, les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si les quatre points sont coplanaires.

Théorème 4 :

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Preuve

Choisissons un point M et considérons les points A, B et C tels que :

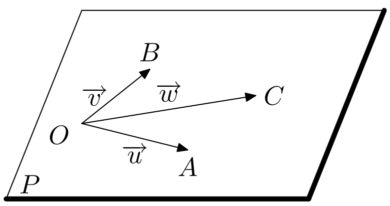
$$\overrightarrow{MA} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{MB} = \vec{v} \qquad \overrightarrow{MC} = \vec{w}$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont des vecteurs directeurs du plan (MAB). Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il existe M tel que $C \in (MAB)$, ce qui est équivalent d'après le théorème précédent, au fait qu'il existe des réels a et b tels que :

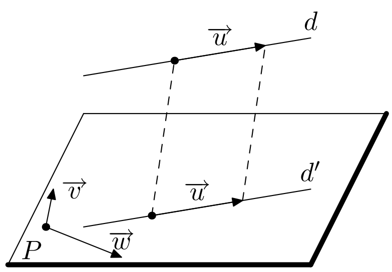
$$\overrightarrow{MC} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} \Longleftrightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Remarque : La notion de vecteurs coplanaires est importante pour prouver :

1. l'appartenance d'un point à un plan : le point C appartient au plan (AOB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires



2. le parallélisme d'une droite d et d'un plan P : la droite d est parallèle au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent une base de P.



Exercice 3 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[EB]$ et J le milieu de $[FG]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Exercice 4 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$.

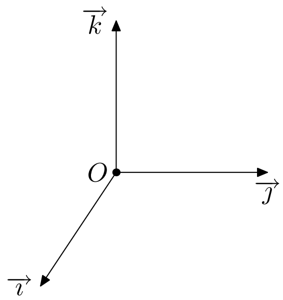
1. Démontrer que la droite (CK) est parallèle au plan (IJH)
2. Démontrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

II) Repérage dans l'espace

II-1 Repère de l'espace

Définition 3 :

Soient trois points O, I, J non alignés et K un point n'appartenant pas au plan (OIJ). On dit que $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ (où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$) est un repère de l'espace.



Remarque :

1. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé base des vecteurs de l'espace.
2. Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux orthogonales et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ on dit que le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ est orthonormée

II-2 Coordonnées d'un point

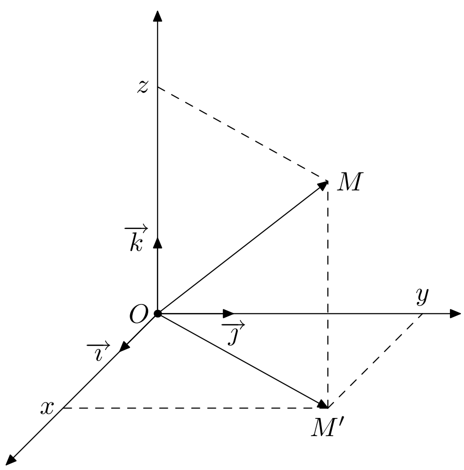
Théorème 5 :

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ de l'espace, pour tout point M il existe un unique triplet de nombres réels $(x; y; z)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

On appelle ce triplet les coordonnées de M, respectivement nommées *abscisse*, *ordonnée* et *côte* de M.

$(x; y; z)$ sont aussi les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{OM}$. On écrit souvent : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Preuve

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires donc le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ et la droite passant par M et dirigée par $\vec{k}$ ne sont pas parallèles. Considérons M' leur point d'intersection, M' est donc dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, donc il existe deux réels tels que :

$$\overrightarrow{OM'} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

. Nous admettrons l'unicité de cette écriture.

II-3 Coordonnées d'un vecteur

Définition 4 :

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère. Au vecteur $\vec{u}$ associons le point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont alors les coordonnées du point M. Par conséquent, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

II-4 Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisème coordonnée.

Théorème 6 :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ donné, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, alors

1. Pour tout réel, k le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky;kz)$
2. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y',z+z')$.
   Si A et B ont pour coordonnées $A(x;y;z)$ et $B(x';y';z')$ alors :
3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x'-x;y'-y;z'-z)$
4. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2};\frac{z+z'}{2}\right)$$

Preuve

A titre d'exemple, voici une démonstration d'une des propriétés ci-dessus (toutes se démontrent de la même manière !!)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} &= -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\ &= -x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}+x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\\ &= (x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}+(z'-z)\vec{k}\end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x'-x;y'-y;z'-z)$

Exercice 5 :

Un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant donné, on considère les points $A(1;2;-3)$, $B(-1;3;3)$ et $C(4;-1;2)$. D est un point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, calculer les coordonnées de D, puis celles du centre I de ce parallélogramme.

Exercice 6 :

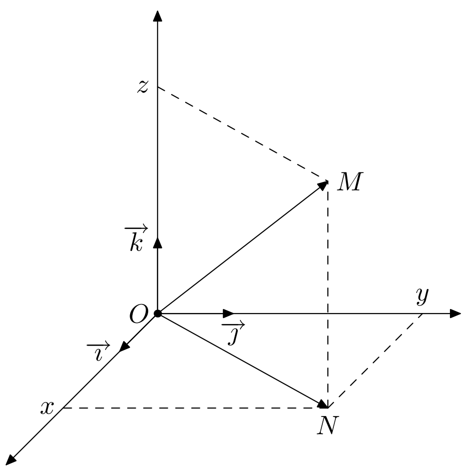
$ABCDIJKL$ est un parallélépipède ; G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer, analytiquement, en choisissant un repère, que les points D, G et J sont alignés.

III) Distance dans l'espace

Théorème 7 : ***Dans un repère orthonormal*** $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. Le vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ a pour norme $|| u ||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
2. On considère deux points $A(x;y;z)$ et $B(x';y';z')$ alors :

$$AB=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$



Preuve

1. Il existe trois réels tels que :
$$\overrightarrow{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
Considérons le point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et le point N, projeté orthogonal de M sur le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ on a alors :$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{NM} = z\vec{k}$.
Le triangle OMN est donc rectangle en N et d'après le théorème de Pythagore :
$$OM^2 = ON^2 + NM^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Longleftrightarrow || u || = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
2. Comme $AB = || \overrightarrow{AB} ||$, il suffit d'appliquer le 1)

Exercice 7 :

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(2;3;2) \qquad ,B(-2;-1;2) \qquad \text{et} \qquad C(-2;3;-2)$$

1. Calculer les distances AB, AC et BC
2. Préciser la nature du triangle ABC

Exercice 8 :

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(1;2;-4)$

1. Déterminer une équation de la sphère S de centre O et de rayon 5
2. Déterminer une équation de la sphère S' de centre O' contenant le point A

Exercice 9 :

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère C le cylindre d'axe $(O;\vec{i})$ et de rayon 32
Déterminer une équation cartésienne du cylindre

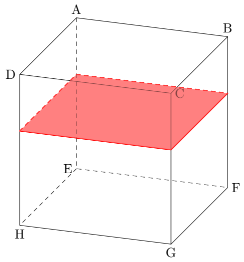
IV) Sections d'un solide par un plan

Tous les résultats énoncés dans cette partie seront admis et aucune démonstration ne sera présentée, de plus on s'intéresse au cas où l'intersection est non vide.

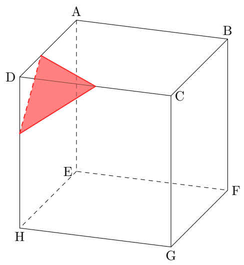
IV-1 Sections planes d'un cube

La section d'un cube par un plan $\mathscr{P}$ peut être de la nature suivante :

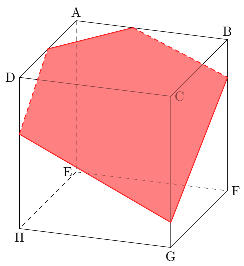
1. Un **carré** lorsque $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des faces :



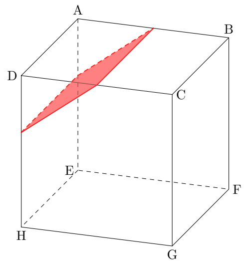
2. Un **triangle** (éventuellement réduit à un point) :



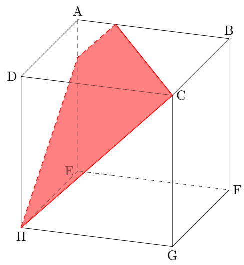
3. Un **pentagone** :



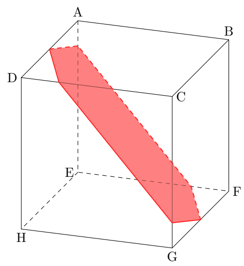
1. Un **rectangle** (éventuellement un segment) lorsque $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des arêtes.



2. Un **trapèze**

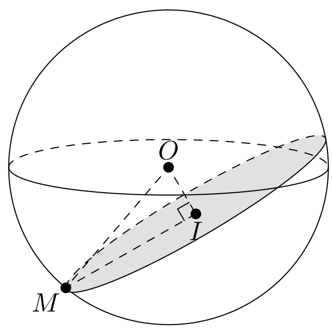


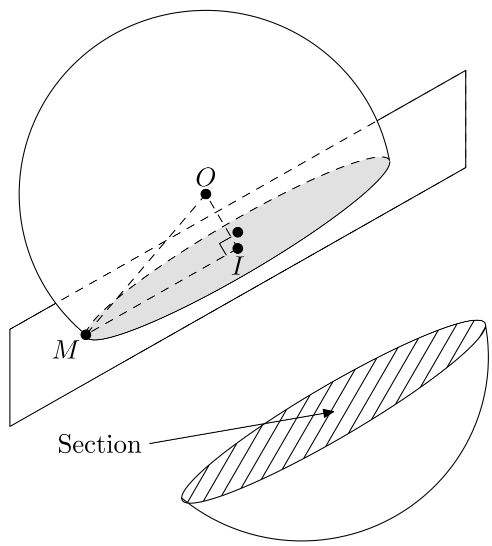
3. Un **hexagone** :



IV-2 Sections planes d'une sphère

La section entre une sphère $\mathscr{S}$ et un plan $\mathscr{P}$ est un cercle (éventuellement réduit à un point).





IV-3 Sections planes d'un cône

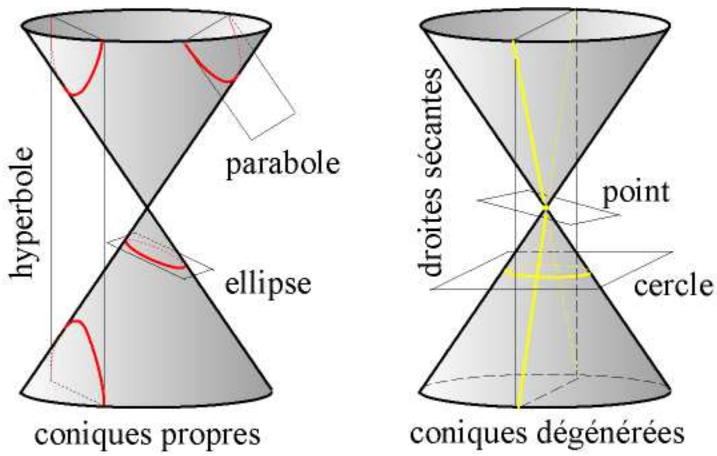
Définition 5 :

Les sections d'un plan $\mathscr{P}$ et d'un cône $\mathscr{C}$ forment une famille de courbes planes, appelées coniques

Remarque : Selon les positions relatives du plan et du cône on obtient trois catégories de côniques :

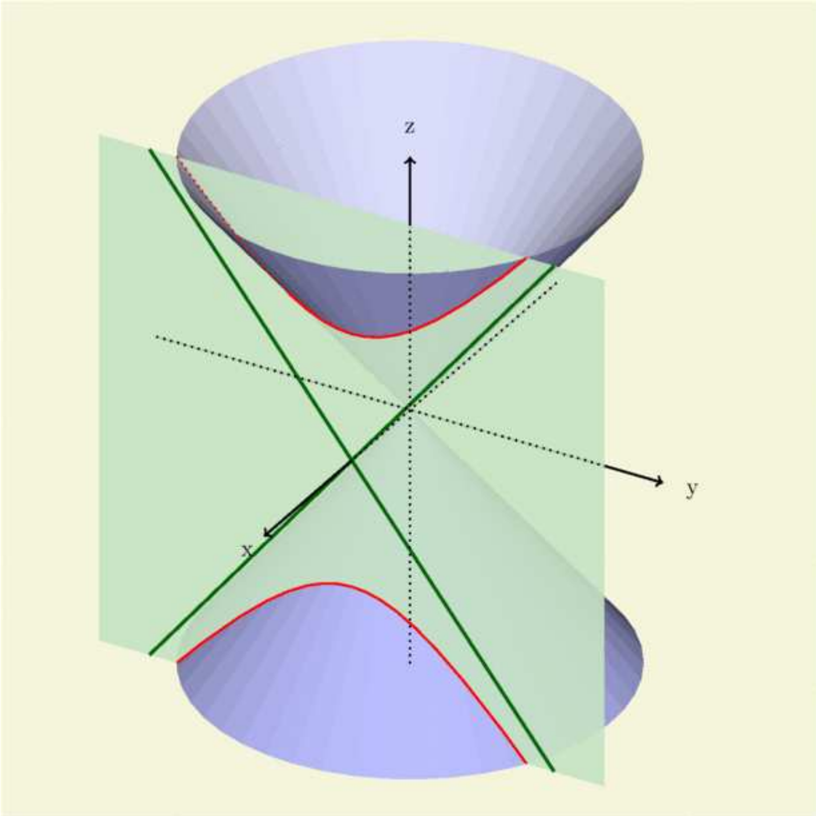
1. les coniques **propres**, quand le plan n'est pas perpendiculaire à l'axe du cône, et ne passe pas par son sommet. On distingue trois sortes de coniques propres en fonction de l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône :
   (a) si cet angle est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, l'intersection est une ellipse ;
   (b) si l'angle d'inclinaison est inférieur à l'angle d'ouverture, c'est une hyperbole ;
   (c) et si les deux angles sont égaux, c'est une parabole.
2. les coniques **partiellement dégénérées** :
   (a) l'intersection est un cercle quand le plan est perpendiculaire à l'axe du cône ;
   (b) l'intersection est une hyperbole équilatère [1] quand l'angle d'inclinaison du plan est inférieur de 45° à l'angle d'ouverture du cône ;
3. et les coniques **totalement dégénérées**, quand le plan contient le sommet du cône :
   (a) l'intersection est un couple de droites sécantes, si l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône est inférieur à l'angle d'ouverture du cône ;
   (b) l'intersection est réduite à une droite si ces angles sont égaux.
   (c) enfin elle est réduite à un point si l'angle d'inclinaison est supérieur à l'angle d'ouverture.

Ci-dessous une figure illustrant le cas des coniques propres et dégénérées :



Enfin le cas d'une intersection entre un plan et un cône qui aboutit sur une hyperbole :

1. Une hyperbole est dite équilatère si si ses deux asymptotes sont perpendiculaires. C'est le cas de la représentation graphique de la fonction inverse par exemple.



« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien