Chapitre 2

Barycentre

Classe de $1^{\text{ère}}$ S

D. Zancanaro

2009-2010

“Télécharger c’est tuer l’industrie, tuons les tous” Thurston Moore

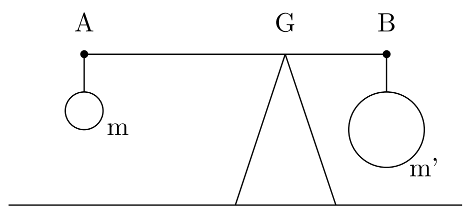
Dernière modification : 8 avril 2010

Table des matières

Cours : Barycentre

Un peu d'histoire

La notion de barycentre (qui vient du grec *barus* qui signifie lourd, massif) est apparu au III^e siècle dans les travaux d'Archimède alors qu'il s'intéressait à l'équilibre des leviers. « Donnez moi un point d'appui, je souleverai le monde »déclarait-il alors. Le travail d'Archimède permit de donner une solution au problème suivant :
Sur une tige de masse négligeable, on suspend deux masses m et m' en A et B. Comment positionner le pivot G pour que l'ensemble soit en équilibre ?



Exemple :

Quel doit être la position du point G si $m' = 2m$

La notion de barycentre intervient dans un premier temps d'un point de vue physique et concret ; il faut attendre Auguste Ferdinand Mobius au XIX^e siècle pour les considérer d'un point de vue strictement mathématique.
On trouve désormais de nombreuses applications des barycentres : les problèmes d'équilibre de balance, de centre de gravité, de centre d'inertie, de moyenne en statistique, ect...

I) Barycentre de deux points pondérés

I-1 Existence et unicité

Théorème 1 :

Soit A et B deux points du plan, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}
& \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \\
\iff\ & \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0} \\
\iff\ & (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0} \\
\iff\ & (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB} \\
\iff\ & \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \text{ possible puisque } \alpha+\beta\neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi chercher un point G vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ revient à chercher un point G tel que

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Il existe un unique point G vérifiant cette dernière égalité.

I-2 Définition

Définition 1 :

Ce point est appelé <u>barycentre de deux points pondérés</u> (A,α) et (B,β) le point G défini par :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

Remarque :

- Si $\alpha+\beta=0$, alors le barycentre n'est pas défini.
- Pour construire le barycentre de deux points pondérés, on utilise la relation :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

- Physiquement, G est le point d'équilibre de la balance $[AB]$ munie de masses α et β. Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

<u>**Exercice**</u> **1.** Déterminer et construire le barycentre G_1 de $\{(A,7);(B,-1)\}$ et G_2 de $\{(A,7);(B,-1)\}$

<u>**Exercice**</u> **2.** Soit G le point du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. G est le barycentre de A et B munis de quelles pondérations ?

<u>Cas particuliers</u> :

- Si $\alpha=0$ alors $\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ et comme $\beta\neq 0$ on a $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ d'où $G=B$
- Si $\beta=0$ alors $\alpha\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ et comme $\alpha\neq 0$ on a $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ d'où $G=A$
- Si $\alpha=\beta$ alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$, ce qui signifie que G est le milieu de $[AB]$. On dit dans ce cas que G est <u>l'isobarycentre</u> de A et B car les coefficients sont égaux.

I-3 Autre caractérisation

Théorème 2 :
Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On a :

$$\text{G barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Longleftrightarrow \forall M \text{ point du plan, } \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Preuve

$\Rightarrow$) Si G est le barycentre de (A,α) et (B,β) on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$
De plus : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{MG}=\alpha\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG}\right)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\forall$ point M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Il vient pour $M=G$: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$, et comme $\alpha+\beta\neq 0$, G est bien le barycentre de (A,α) et (B,β)

Corollaire 1 :
Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On a :

$$\text{G barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Remarque : Cette relation permet de construire le point G

Preuve

$\Rightarrow$) Supposons que G barycentre de (A,α) et (B,β), d'après le théorème 2 on a pour $M=A$:

$$\beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \text{ puisque } \alpha+\beta\neq 0$$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} \\ \Longleftrightarrow\quad & \beta\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AG} \\ \Longleftrightarrow\quad & \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Comme $\alpha+\beta\neq 0$, G est le barycentre de (A,α) et (B,β)

__Exercice__ **3.** Placer deux points A et B quelconque dans le plan, puis placer le point G barycentre de $(A,3)$ et $(B,2)$

I-4 Propriétés

Théorème 3 :

Homogénéité

On ne change pas le barycentre de deux points pondérés en multipliant les deux coefficients par n'importe quel réel non nul

Preuve

Soit un réel $k \neq 0$, on a alors :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Comme $k\alpha + k\beta \neq 0$, G est bien le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$

Exemple :

Construire le barycentre de $(A, 5000)$ et $(B, 3000)$ revient *à* construire le barycentre de $(A, 5)$ et $(B, 3)$

Théorème 4 :

Si G est le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors $G \in (AB)$

Plus précisément :

i) Si α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$

ii) Si α et β sont de signe contraire alors $G \notin [AB]$

Preuve

Comme $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points A, B et G sont alignés.

Si $\alpha = 0$ alors $G = B$ et donc $G \in [AB]$

Si $\alpha \neq 0$ alors G barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff G$ barycentre de $\{(A, 1); (B, \dfrac{\beta}{\alpha})\}$, i.e :

$$\overrightarrow{AG} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$$

Si α et β sont de même signe , alors $\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de même sens, donc $G \in [AB]$

Sinon $\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraire, donc $G \notin [AB]$

Théorème 5 :

Soit α un nombre réel non nul. Le barycentre G, appelé isobarycentre ou centre de gravité, de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ est le milieu du segment $[AB]$.

Preuve

Soit α un nombre réel non nul. On a :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

D'après le corollaire du théorème 2 avec $\alpha = \beta = 1$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Donc G est le milieu du segment $[AB]$.

Théorème 6 :

La droite (AB) est l'ensemble des barycentre M de $\{(A, 1-k); (B, k)\}$ où $k \in \mathbb{R}$

Preuve

Soit M un point du plan. On a :
$M \in (AB) \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$
$\iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} \iff (1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ avec $1-k+k \neq 0$ ce qui prouve que M est barycentre de $\{(A, 1-k); (B, k)\}$ où $k \in \mathbb{R}$

I-5 Coordonnées du barycentre

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, on considère les points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_b)$ et $G(x_G; y_G)$ le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. On a : $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$ donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

Donc : $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

Théorème 7 :

Les coordonnées du barycentre G de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ sont : $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$ (moyennes pondérés des coordonnées de A et de B)

Exercice 4. Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(3; 1; 1)$ et $B(1; 3; 0)$. Calculer les coordonnées du barycentre G de $\{(A, 1); (B, 3)\}$

Exercice 5. Dans un repère du plan, on donne les points $A(3; 2)$ et $B(-1; 4)$. $G = bar\{(A, 3); (B, -2)\}$ et $G' = bar\{(A, -2); (B, 3)\}$.

1. Calculer les coordonnées de G et G'
2. Vérifier que $[AB]$ et $[GG']$ ont même milieu

II) Barycentre de trois points pondérés ou plus dans le plan ou dans l'espace

L'étude faite au paragraphe précèdent se généralise *à* trois points pondérés ou plus, dans le plan ou dans l'espace. Nous n'énoncerons les résultats dans le cas de trois points pondérés du plan.

II-1 Définition et propriétés

Théorème 8 :

Soit A, B et C trois points du plan et α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Il existe un unique point vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}
& \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \\
\iff\ & \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0} \\
\iff\ & (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \\
\iff\ & (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC} \\
\iff\ & (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} \\
\iff\ & \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \text{ possible puisque } \alpha+\beta\neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi chercher un point G vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}++\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ revient à chercher un point G tel que

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Il existe un unique point G vérifiant cette dernière égalité.

Définition 2 :

On appelle barycentre de trois points pondérés $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ le point G défini par :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

Théorème 9 :

Soit α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. On a :

$$\text{G bar } \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \iff \forall M\in P\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Preuve

$\Rightarrow$) Si G est le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

De plus : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{MG}+\gamma\overrightarrow{MG}$

$=\alpha\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CG}\right)$

$=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\forall M\in P$:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Il vient pour $M=G$: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, et comme $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, G est bien le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

Corollaire 2 :

Soit α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. On a :

$$\text{G barycentre de } \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \iff \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Preuve

On utilise le théorème 9 avec $M = A$

Remarque : La propriété d'homogénéité est encore vraie et les coordonnées du barycentre G sont :

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

II-2 Associativité

Théorème 10 :

Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ et H le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \Longleftrightarrow G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Preuve

Soit $H = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$$

Soit $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GH} + +\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

Exemple :

$G = bar\{(A,1);(B,2);(C,3)\} = bar\{(H,3);(C,3)\}$ où $H = bar\{(A,1);(B,2)\}$ donc G est le milieu de $[HC]$

<u>Exercice</u> 6. Soit $ABCD$ un tétraèdre et $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,4)\}$. Situer G

<u>Exercice</u> 7. ABC est un triangle. I est le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
K est le symétrique de A par rapport $à$ C et J est le milieu de $[BC]$.
<u>But</u> : montrer que I, J et K sont alignés.

1. Exprimer I, J et K comme barycentres de deux points pondérés dont les coefficients sont $à$ préciser.
2. Quel est le barycentre de $\{(A,1);(B,2);(C,2);(C,-2)\}$
3. Conclure

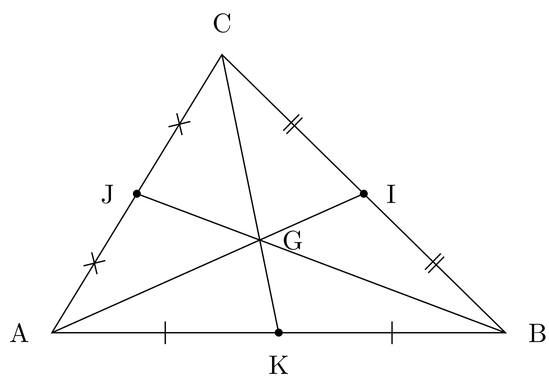
<u>Exercice</u> 8. $ABCD$ est un tétraèdre. Situer l'isobarycentre G du tétraèdre.

III) Applications

III-1 Isobarycentre et centre de gravité

Définition 3 :
L'isobarycentre de trois points A, B et C est le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\alpha);(C,\alpha)\}$ où $\alpha \neq 0$

Théorème 11 :
L'isobarycentre G de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC. Il vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

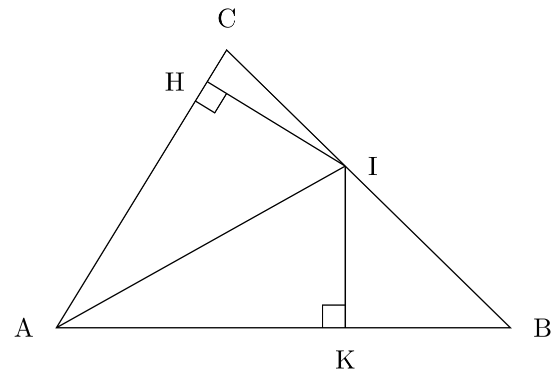


Preuve

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, de $[AC]$ et de $[AB]$.
$I = bar\{(B,1);(C,1)\}$; $J = bar\{(A,1);(C,1)\}$ et $K = bar\{(A,1);(B,1)\}$. De plus $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$. D'après l'associativité du barycentre il vient :
- $G = bar\{(A,1);(I,2)\}$ et donc $G \in (AI)$
- $G = bar\{(B,1);(J,2)\}$ et donc $G \in (BJ)$
- $G = bar\{(C,1);(K,2)\}$ et donc $G \in (CK)$

En conclusion G est le point d'intersection des médianes du triangle ABC ; G est donc le centre de gravité de ABC

III-2 Caractérisation des pieds des bissectrices par des barycentres



Soit ABC un triangle et I le pied de la bissectrice (interieure) issue de A. On note H et K les projetés orthogonaux de I sur $[AC]$ et $[AB]$. Notons de plus $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$
On a alors : $IK = IH$ et $AK = AH$. Comme I est sur $[BC]$, il existe deux réels β et $/gamma$ de même signe tels que

$$\beta + \gamma \neq 0 \text{ et } \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont de sens opposés, on a :

$$\beta IB - \gamma IC = 0 \Longleftrightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{\gamma}{\beta}$$

On peut donc choisir : $\beta = IC$ et $\gamma = IB$, i.e :

$$I = bar\{(B, IC); (C, IB)\}$$

Or les triangles AIC et AIB ont une hauteur commune h (celle issue de A dans ABC), donc en multipliant les coefficients par $\dfrac{h}{2}$ on a :

$$I = bar\{(B, AireAIC); (C, AireAIB)\}$$

Or : $AireAIC = \dfrac{AC \times IH}{2}$ et $AireAIB = \dfrac{AB \times IK}{2}$. Comme $IK = IH$, en divisant les coefficients par $\dfrac{IK}{2}$ on a :

$$I = bar\{(B, AC); (C, AB)\} \Longleftrightarrow I = bar\{(B, b); (C, c)\}$$

III-3 Centre d'inertie

III-3.1 Définition

Considérons le mouvement d'un solide lancé *à* une vitesse quelconque au voisinage de la terre. Étudier le mouvement de ce solide revient *à* connaître le mouvement de chacun des points matériels le constituant. Dans le référentiel terrestre , ces points peuvent avoir un mouvement complexe. Il se trouve a un mouvement toujours bien plus simple que les autres c'est le <u>centre d'inertie</u> du solide

Définition 4 :

Le centre d'inertie de points materiels est le barycentre de ces points pondérés de leurs masses respectives

Exemple :

On considère un système formé de deux points A_1 et A_2 de masses m_1 et m_2. Le centre d'inertie du système est alors le point G défini par $G = bar\{(A_1, m_1); (A_2, m_2)\}$

Le centre d'inertie est le point d'équilibre des masses, i.e le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie.

III-3.2 Caractérisation du centre d'inertie d'une plaque homogène

On qualifie d'homogène une plaque d'épaisseur négligeable dont la masse est répartie uniformément. Afin de localiser le centre d'inertie d'une plaque homogène on admettra le théorème suivant :

Théorème 12 :

Si la plaque contient un élément de symétrie matériel, cet élément de symétrie contient le centre d'inertie

Conséquence :
- Si la plaque possède un centre de symétrie, il s'agit du centre d'inertie
- Si la plaque possède un axe de symétrie, le centre d'inertie se trouve sur cet axe

Exemple :

Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est le centre de gravité de ce triangle

Exercice 9. $ABCD$ est un quadrilatère .
Construire l'isobarycentre G des points A, B, C et D (on pourra utiliser le milieu U de la diagonale $[AC]$ et le milieu V de la diagonale $[BD]$.
On souhaite désormais construire le centre d'inertie de la plaque $ABCD$.
Construire le centre d'inertie I_1 du triangle ABC et le centre d'inertie I_2 du triangle ACD. En déduire que $I \in (I_1I_2)$
Construire le centre d'inertie I_3 du triangle ABD et le centre d'inertie I_4 du triangle CBD. En déduire que $I \in (I_3I_4)$
En déduire la position du point I