Introduction aux Probabilités

Introduction

Histoire

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent *axiomatique*) en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI ème siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux **probabilités**, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.

Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda à Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 en ajoutant les résultats de trois dés. La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir.
En effet, pour 9 les combinaisons sont : 1+2+6, ... , ... , ... , ... , ...
Tandis que pour 10, les combinaisons sont : . . . . , ... , ... , ... , ... , ...

Comment expliquer cela ? Y aurait-il plusieurs réalités ?

Qu'est ce que le hasard ?

Parmi toutes les définitions possibles, en voici deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

– Pour certains, tout a une cause, et le **hasard** n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature.
  Cet esprit souffla particulièrement au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales.
  Par exemple, un dé a six faces, donc on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de 1/6. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourir à l'expérience. Elle implique la notion centrale, que nous verrons cette année, d'**équiprobabilité** : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
– Pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématique mais une réalité physique.
  La *théorie du chaos*, mise en forme par René Thom en 1955, montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Qui a raison ? Qui a tort ? Le débat est encore ouvert. Nous pouvons néanmoins réunir deux grands groupes :

– Ceux qui prônent une étude expérimentale des probabilités à l'aide de la *Loi des Grands Nombres* (l'idée est que la limite des fréquences observées est égale à la probabilité : plus on fait de mesures, plus la fréquence se rapproche de la probabilité).

– Inversement, la géométrie du hasard des Laplaciens (1 chance sur 6 d'obtenir chacune des faces d'un dé) repose sur la parfaite symétrie du dé. Mais un dé peut-il être parfaitement symétrique ? Pour le vérifier, il faudrait un grand nombre d'expériences…

Bref, au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent. Mais il faut les avoir en tête : tout n'est pas équiprobable (voir les dés ci-dessus) et la probabilité ne peut se réduire à la limite des fréquences, ne serait-ce que dans le cas d'une expérience qui ne peut se répéter. Quelle est la probabilité de survivre à une guerre nucléaire ? Il semble difficile d'imaginer une série d'expériences pour s'approcher de cette probabilité…

Même si elles peuvent apparaître antagonistes, ces deux notions ont en commun de postuler que **l'issue de l'expérience** (comme le lancer d'un dé) **est indépendante de l'observateur**. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie. Faute de données sures, en économie on estime a priori les probabilités de certains événements élémentaires, puis on utilise ensuite des théorèmes abstraits issus des mathématiques. Comme le disait John Stuart Mill : *we must remember that the probability of an event is not a quality itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it.*

Remarque finale !

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectrangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore, ou du moins à l'utiliser.
Le débat est cependant plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov, pour enfin les axiomatiser, alors qu'Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt…

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

John Louis von Neumann, réaliste…

1 Théorie des ensembles et dénombrement

Introduction à la théorie des ensembles

Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles. Certains sont finis (comme l'ensemble des chiffres), d'autres infinis dénombrables (on peut les « compter », comme l'ensemble $\mathbb{N}$), d'autres encore infinis non dénombrables, (comme l'ensemble …).
Le but de cet partie n'est pas de faire une étude complète de la théorie des ensembles (trop complexe) mais de proposer une approche intuitive des notions les plus utilisées de cette théorie. Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble, disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un certains nombre de propriétés communes (par exemple l'ensemble des nombres entiers naturels multiples de 2, l'ensemble des polynômes de degré 3, …).
Un ensemble se note avec des accolades, par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 alors :

$$E = \{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$$

On considère les objets d'un ensemble dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel : on ne fera pas la différence entre : l'ensemble E et l'ensemble $\{\dots,\dots,\dots,\dots,\dots\}$.
On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble :

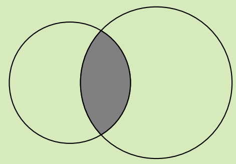
$$2 \dots E \qquad \text{et } 3 \dots E$$

Enfin nous noterons $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (appelé ....).

1.1 Intersection

Définition 1 :

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A **et** B. On note cet ensemble $A \cap B$.



Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles **disjoints**.

Exemple :
Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$ alors $A \cap B = \{\dots;\dots;\dots\}$

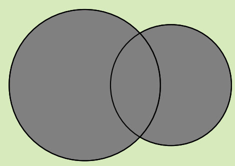
Remarque :

$$e \in A \cap B \quad \text{signifie} \quad e \in A \quad \dots \quad c \in B$$

1.2 Réunion

Définition 2 :

La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A **ou** dans B. On le note $A \cup B$.



Exemple :
Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$ alors $A \cup B = \{\dots;\dots;\dots;\dots;\dots;\dots;\dots\}$

Remarque :

$$e \in A \cap B \quad \text{signifie} \quad e \in A \quad \dots \quad c \in B$$

1.3 Inclusion

Définition 3 :

On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note :

$$A \subset B$$

On dit alors que A est une « partie » de B ou que A est un « sous-ensemble » de B.

Exemple :
Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $B = \{0; 2\}$ alors $B \quad \dots \quad A$.

Remarque : On a toujours $A \dots A$, $\emptyset \dots A$, $A \dots A \cup B$ et $A \cap B \dots A$

1.4 Complémentaire

Définition 4 :
Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note

$$E - A \qquad \text{ou} \qquad \bar{A} \qquad \text{ou encore} \qquad {}^{C}A$$

Exemple :
Si $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ alors $\bar{A} = \{\dots; \dots; \dots\}$

Remarque : On a toujours $A \cup \bar{A} = \dots\dots$ et $A \cap \bar{A} = \dots\dots$

1.5 Partition

Définition 5 :
Des parties A_1, A_2, A_3, $\dots$, A_p d'un ensemble E constituent une partition de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Pour tous i et j de $\{1; \dots; p\}$:

$$i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p = E$$

Exercice 1 **:**
Combien de partitions peut-on former avec un ensemble à trois éléments ? à quatre éléments ?
Aidez-vous sur des exemples d'ensembles, tels que $\{a, b, c\}$

1.6 Produit cartésien

Définition 6 :
Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où x appartient à E et y appartient à F. Cet ensemble est noté $E \times F$.

Exemples :

- Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le produit cartésien $\cdots \times \dots$, également noté $\mathbb{R}^2$.
- Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors
  $E \times F = \{(\dots, \dots); (\dots, \dots); (\dots, \dots); (\dots, \dots); (\dots, \dots); (\dots, \dots)\}$

Remarque : Le produit cartésien se généralise à plusieurs ensembles : $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$.
Les éléments sont des « couples » quand $p = \ldots$, des « triplets » quand $p = \ldots$ et des « p-uplets » dans le cas général (comme des « quatre-uplets » , ou encore *quadruplets*).

1.7 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 7 :
Le nombre d'éléments d'un ensemble *fini* E est appelé **cardinal** de E.
Ce nombre est noté Card E. On convient que Card $(\emptyset) = 0$.

Exemple :
Si $E = \{0; 1; 2\}$, alors Card $E = \ldots$

Remarque : La notion de cardinal ne s'étend pas aux ensembles infinis, tel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

Exercice 2 :
Soit A l'ensemble des entiers naturels strictement inférieur à 10 qui sont pairs
Soit B l'ensemble des entiers naturels strictement inférieur à 10 qui sont divisibles par 3

1. Donner les éléments de $A \cap B$ et $A \cup B$
2. Décrire un ensemble C qui soit inclus dans B
3. Décrire $\bar{A}$ et $\bar{B}$
4. Trouver un ensemble D tel que A et D soient disjoints
5. On note $E = A \cap B$. Décrire l'ensemble $B \times E$. Quel est son cardinal ?

2 Probabilités (discrètes)

Introduction

Le but de cette partie est de construire un modèle pour décrire les expériences aléatoires. De telles expériences sont par exemple : le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenue en lançant une pièce de monnaie, la carte obtenue en la tirant au hasard d'un jeu, le tirage du loto, etc...
Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats qui nous sont parfois intuitivement évidents et que nous n'arrivons pas toujours a expliquer sont en fait faux ! Comme en témoigne l'exercice suivant :
Pensez-vous que dans un groupe de 30 personnes l'on rencontre fréquemment 2 personnes ayant leur anniversaire le même jour ?
Pour avoir au moins une chance sur deux de trouver deux personnes ayant le même anniversaire, combien doit-il y avoir au minimum de personnes dans un groupe ?

Problème d'introduction

Problème :

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elle se trouve 10000 € et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux portes mauvaises, tout en conservant celle choisit par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quels sont ces chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

2.1 Expériences aléatoires, événements

Définition 8 :

Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat est incertain

Exemple :

Le lancer de dé ou le lancer d'une pièce de monnaie sont des expériences dont l'issue est incertaine.

2.1.1 Expériences aléatoires, issues, événements, univers

Définition 9 :

- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue**
- L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**.
  On a pour habitude de noter cet ensemble Ω
- Un sous-ensemble de l'univers est appelé **événement**, c'est un ensemble constitué d'éventualités de l'univers.

Remarque : En classe de première l'ensemble Ω sera presque toujours un ensemble fini.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$
On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro de la face obtenue est pair (P) ou impair (I) : $\Omega = \{\ldots,\ldots\}$
On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue, pile (P) ou face (F) : $\Omega = \{\ldots,\ldots\}$
On effectue la même expérience que précédemment en lançant deux pièces de monnaie :
$\Omega = \{\ldots\ldots;\ldots\ldots;\ldots\ldots;\ldots\ldots\}$
Décrire l'événement A : « Faire au moins une fois Pile ».

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur deux univers différents suivant les hypothèses faites. Il faut donc être précis. Par exemple si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenues, on obtient :

$$\Omega_P = \{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$$

$$\Omega_S = \{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\ldots;\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$$

Décrire les évènements B_P et B_S : « obtenir un multiple de 3 » dans les deux cas.

2.1.2 Récapitulatif du vocabulaire probabiliste

Exemple :
On lance deux dés et l'on considère la somme obtenue. Le tableau ci-dessous résume le vocabulaire relatif aux événements et le vocabulaire ensembliste

Vocabulaire	**Signification**	**Illustration**
L'univers Ω, événement **certain**	L'ensemble des éventualités	$\Omega =$
L'ensemble vide $\emptyset$, événement **impossible**	L'ensemble qui ne contient aucune éventualité	
Éventualité	L'un des résultats de l'expérience	Obtenir 7 : $\omega =$
Événement	Sous ensemble de l'univers	Obtenir un nombre pair : $A = \ldots$; ou obtenir une somme inférieure à 4 : $B =$
Événement A **et** B, $A \cap B$	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B =$
Événement A **ou** B, $A \cup B$	Événement constitué de toutes les issues possibles des 2 événements	$A \cup B =$
Événement **incompatibles** ou **disjoints**, on note $A \cap B = \emptyset$	Ce sont des événements qui n'ont aucunes issues en commun	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \emptyset$
Événement **contraire** ; le contraire de A se note $\bar{A}$	Ce sont 2 événements incompatibles dont la réunion forme l'univers	$\bar{A} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $A \cap \bar{A} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $A \cup \bar{A} = \ldots\ldots\ldots$

Exercice 3 :
On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'interesse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $C \cap B$; $C \cup B$; $\bar{A}$; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraire l'un de l'autre.