Exercices résolus

<u>Exercice 3.10 du cours</u> :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$. Quels sont les extrema locaux de f ?

Pour trouver les extrema locaux, on étudie le signe de la dérivée.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

On a $f'(x) = 0 \iff 3x(x-4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$
Les extrema locaux possibles pour f sont donc $f(0)$ et $f(4)$.
Vérifions que la dérivée change de signe en 0 et en 4.
On dresse le tableau de signes de f' :
On sait qu'un trinôme du type $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		0		4		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La dérivée f' change de signe en 0 et en 4, donc $f(0)$ et $f(4)$ sont des extrema locaux.
Plus précisément on a $f(0) = 2$ est un maximum local et $f(4) = -30$ est un minimum local.

<u>Exercice 19 de la fiche JF et 26 de la fiche JD</u> :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. **Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.**
   $f(0) = 10$. Donc le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est le point $A(0; 10)$.
   A est sur l'axe des ordonnées d'où $x_A = 0$ et il est sur $\mathscr{C}_f$ d'où $y_A = f(0)$.

2. **Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.**
   Ce(s) point(s) sont sur l'axe des abscisses d'où $y = 0$ et ils sont sur $\mathscr{C}_f$ d'où leurs coordonnées du type $(x; 0)$ avec x tel que $f(x) = 0$.
   On doit donc résoudre $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x+1} = 0 \iff x^2 + 7x + 10 = 0$ et $x \neq -1$
   Après calculs on trouve $\Delta = 9$ et $x_1 = -5$ et $x_2 = -2$.
   Donc les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisse sont $B(-5; 0)$ et $C(-2; 0)$.

3. **Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$**
   $$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + x(b+a) + b + c}{x+1}$$
   Donc $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} \iff \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{array}$

Finalement on trouve $f(x) = x + 6 + \dfrac{4}{x+1}$.

4. Etudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\mathcal{D}$ dont on précisera l'équation.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{4}{x+1} = \lim_{X\to 0^+} \frac{4}{X} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{X\to 0^-} \frac{4}{X} = -\infty$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\mathcal{D}$ d'équation $x = -1$.

5. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+7x+10}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.
Pour cela, on calcule la limite de la différence $f(x) - (x+6)$, puis on regardera le signe de cette différence.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - (x+6) = \lim_{x\to +\infty} x + 6 + \frac{4}{x+1} - (x+6) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

Donc la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Quand $x \to +\infty$ on a $f(x) - (x+6) = \dfrac{4}{x+1} > 0$ donc C_f est au-dessus de Δ.
Quand $x \to -\infty$ on a $f(x) - (x+6) = \dfrac{4}{x+1} < 0$ donc C_f est en-dessous de Δ.

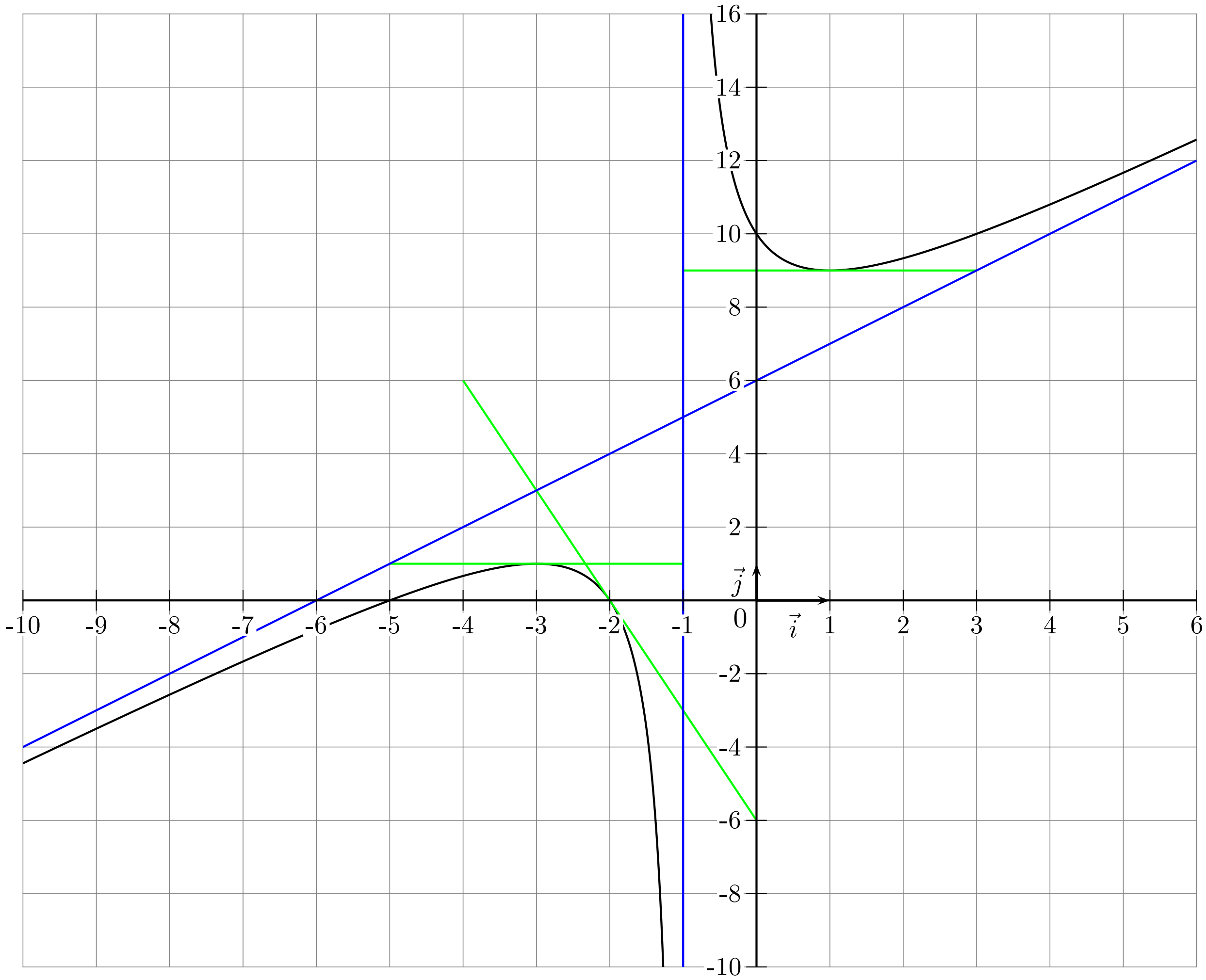
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
On pose $u(x) = x^2 + 7x + 10$ et $v(x) = x + 1$. Alors $u'(x) = 2x + 7$ et $v'(x) = 1$.
Alors $f'(x) = \dfrac{(2x+7)(x+1) - 1(x^2+7x+10}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+7x+7-x^2-7x-10}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.
Après calculs, on a $\Delta = 16$ et $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
On peut alors dresser le tableau suivant :

On n'oublie pas la valeur interdite ! ! De plus, on le complète avec les limites calculées précédemment (questions 4 et 5) et les valeurs $f(-3)$ ***et*** $f(1)$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

8. **Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et -3.**
On rappelle l'équation de la tangente au point d'abscisse a ***:*** $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
On a $T_{-2} : y = f'(-2)(x+2)f(-2)$. On calcule donc $f'(-2) = -3$ et $f(-2) = 0$. *On retrouve le résultat de la question 2.*
Donc $T_{-2} : y = -3(x+2)$
De même on a $T_{-3} : y = f'(-3)(x+3)f(3)$. On calcule donc $f'(-3) = 0$ et $f(-3) = 1$. *Déjà calculés à la question 7.*
Donc $T_{-3} : y = 1$

9. **Tracer, dans le repère, $\mathcal{D}$, Δ, T_{-2}, T_{-3} et $\mathscr{C}_f$. (On se limitera à** $[-10; -1[\cup] -1; 6]$)



<u>Exercice 18 de la fiche JF et 24 de la fiche JD</u> :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$**

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{x} = 0 \Longleftrightarrow x^2-3x+1 = 0 \text{ et } x \neq 0$$

Après calculs, on a $\Delta = 5$, $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. **Vérifier que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$.**

$x - 3 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x-3)+1}{x} = \dfrac{x^2-3x+1}{x} = f(x)$

3. **Etudier la limite de f quand x tend vers 0. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on précisera une équation.**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3x+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\mathcal{D}$ d'équation $x = 0$.

4. **Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

5. **Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)]$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ dont on précisera l'équation et étudier la position de Δ et $\mathscr{C}_f$.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x\to+\infty} x - 3 + \frac{1}{x} - (x-3) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Quand $x \to +\infty$ on a $f(x) - (x+6) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc C_f est au-dessus de Δ.

6. **Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe. En déduire son tableau des variations.**
On pose $u(x) = x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = x$. Alors $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = 1$.
Alors $f'(x) = \dfrac{(2x-3)x - 1(x^2-3x+1}{x^2} = \dfrac{2x^2-3x-x^2+3x-1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.
On a alors $x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.
On peut alors dresser le tableau suivant :
On n'oublie pas la valeur interdite ! ! De plus, on le complète avec les limites calculées précédemment et les valeurs $f(-1)$ et $f(1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$