Correction DM 8

Exercice 1. (2 points)

Pour $I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ on utilise la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1. Alors $u_n = 2n - 1$ et I_n contient n termes.

Donc $I_n = n \times \dfrac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$.

Pour $P_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ on utilise la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 2. Alors $u_n = 2n$ et P_n contient n termes.

Donc $P_n = n \times \dfrac{2 + 2n}{2} = n(n+1)$.

Exercice 2. (4 points)

1. On sait que les côtés sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Appelons r sa raison. Alors on a que les trois côtés du triangle ABC sont du type 1, $1+r$ et $1+2r$ (dans ce cas $r > 0$) . Comme de plus le triangle est rectangle, d'après Pythagore on a
$$1^2 + (1+r)^2 = (1+2r)^2 \iff 2 + 2r + r^2 = 1 + 4r + 4r^2 \iff 3r^2 + 2r - 1 = 0$$
On a $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$. Donc on trouve $r_1 = \dfrac{-2-4}{6} < 0$ (Impossible) et $r_2 = \dfrac{-2+4}{6}$.
Donc $r = \dfrac{1}{3}$ et les longueurs des côtés sont 1, $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{5}{3}$.
2. On procède de même mais on appelle q la raison de la suite géométrique.
On a que les trois côtés de ABC sont du type 1, q et q^2 (dans ce cas $q > 1$).
Comme de plus le triangle est rectangle, d'après Pythagore on a
$$1^2 + q^2 = (q^2)^2 \iff q^4 - q^2 - 1 = 0$$
Pour résoudre cette équation bicarrée, posons $Q = q^2$. Alors on a $Q^2 - Q - 1 = 0$.
$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$. D'où $Q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $Q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Comme $Q = q^2 > 0$, la solution Q_2 est impossible.
Finalement on a $q_1 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $q_2 = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
Comme $q > 1$, on trouve $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et les longueurs des côtés sont 1, q et Q_1.

Exercice 3. (5 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. $$w_n = u_n + vn = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} + \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} = \frac{3 \times 2^n + 3 \times 2^n}{2} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{2} = 3 \times 2^n$$
Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 2.
2. $$t_n = u_n - vn = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} - \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} = \frac{-8n + 6}{2} = -4n + 3$$
Donc (t_n) est une suite arithmétique de raison -4.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_n = u_n + vn$ et $t_n = u_n - vn$. Donc $w_n + t_n = 2u_n$. D'où :
$$u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4.

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\
&= \frac{1}{2}(w_0 + t_0) + \frac{1}{2}(w_1 + t_1) + \cdots + \frac{1}{2}(w_n + t_n) \\
&= \frac{1}{2}\left[(w_0 + t_0) + (w_1 + t_1) + \cdots + (w_n + t_n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(w_0 + w_1 + \cdots + w_n) + (t_0 + t_1 + \cdots + t_n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(w_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + (n+1)\frac{t_0 + t_n}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} + (n+1)\frac{3 - 4n + 3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-3 \times (1 - 2^{n+1}) + (n+1)\frac{-4n + 6}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(3 \times (2^{n+1} - 1) + (n+1)(-2n + 3)\Big) \\
S_n &= \frac{3 \times (2^{n+1} - 1) + (n+1)(-2n + 3)}{2}
\end{aligned}$$

5. $S_{10} = \dfrac{3 \times (2^{11} - 1) + 11(-20 + 3)}{2} = \dfrac{3 \times (2048 - 1) - 187}{2} = 2977$

<u>Exercice</u> 4. (9 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. $u_1 = \dfrac{2}{1 + u_0} = \dfrac{2}{1 + 3} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad u_2 = \dfrac{2}{1 + u_1} = \dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}$

2. On a $u_1 - u_0 = 2.5$ et $u_2 - u_1 \neq 2.5$ Donc la suite u n'est pas arithmétique.

   On a aussi $\dfrac{u_1}{u_0} = 6$ et $\dfrac{u_2}{u_1} \neq 6$. Donc la suite u n'est pas géométrique non plus.

3. (a) On suppose qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_k \leq 3$. On a alors

$$\begin{aligned}
0 \leq u_k \leq 3 &\iff 1 \leq 1 + u_k \leq 4 \\
&\iff \frac{1}{1} \geq \frac{1}{1 + u_k} \geq \frac{1}{4} \\
&\iff 2 \geq \frac{2}{1 + u_k} \geq \frac{2}{4} \\
&\implies 3 \geq u_{k+1} \geq 0
\end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}_k \Longrightarrow \mathscr{P}_{k+1}$.
   Aautrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang k, alors elle est aussi vraie au rang suivant $k + 1$.
   On dit que la propriété $\mathscr{P}_k : 0 \leq u_k \leq 3$ *est **héréditaire**.*

   (b) Comme la propriété est vraie au rang 0, d'après la question précédente, elle est aussi vraie au rang 1 ($k = 0$).
   Comme la propriété est vraie au rang 1, elle est aussi vraie au rang 2 ($k = 2$).
   Comme la propriété est vraie au rang 2, elle est aussi vraie au rang 3 ($k = 3$). Et ainsi de suite.
   On obtient que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n \leq 3$.
   *On appelle ce type de démarche le raisonnement par **récurrence**.*

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

(a) $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{3-1}{3+2} = \dfrac{2}{5}$ $\qquad v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\dfrac{1}{5}$ $\qquad v_2 = \dfrac{u_2 - 1}{u_2 + 2} = \dfrac{1}{10}$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{2}{1+u_n} - 1}{\dfrac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\dfrac{2 - 1 - u_n}{1+u_n}}{\dfrac{2+2+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{1}{2}\times\frac{1-u_n}{2+u_n} = -\frac{1}{2}\times\frac{u_n - 1}{2+u_n} = -\frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

(c) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{2}{5 \times (-2)^n}$

(d) On a

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} &\iff (u_n + 2)v_n = u_n - 1 \\
&\iff u_n v_n + 2v_n - u_n = -1 \\
&\iff u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n \\
&\iff u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} \quad \text{(si } v_n \neq 1 \text{ ce qui évident de par sa définition)} \\
&\iff u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}
\end{aligned}$$

Par conséquent on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n} = \frac{1 + 2\dfrac{2}{5\times(-2)^n}}{1 - \dfrac{2}{5\times(-2)^n}} = \frac{\dfrac{5\times(-2)^n + 4}{5\times(-2)^n}}{\dfrac{5\times(-2)^n - 2}{5\times(-2)^n}} = \frac{5\times(-2)^n + 4}{5\times(-2)^n}\times\frac{5\times(-2)^n}{5\times(-2)^n - 2} = \frac{5\times(-2)^n + 4}{5\times(-2)^n - 2}$$

(e) $u_{10} = \dfrac{5\times(-2)^{10} + 4}{5\times(-2)^{10} - 2} = \dfrac{5124}{5118} = \dfrac{854}{853}$