

DM 5 : Limites

1 Théorème de majoration, minoration



Théorème 1 : *Admis*

Soient f , u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a; +\infty[$.

- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites quand x tend vers $-\infty$ et x tend vers $a \in \mathbb{R}$

Exercice 1.

(2 points)

- Soit $f(x) = -x + \cos x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Soit $g(x) = \frac{\sqrt{4+x^4}}{x^4}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

2 Théorème des gendarmes



Théorème 2 : *Admis*

Soient f , u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a; +\infty[$.

Si pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites quand x tend vers $-\infty$ et x tend vers $a \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = -3 + \frac{\sin x}{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (2 points)

Exercice 3. Une limite à connaître : Le but de cette partie est de déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (16 points)

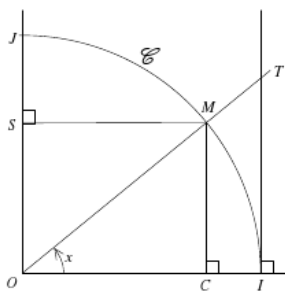
Partie A : Etude du problème

- Expliquer pourquoi cette limite est une forme indéterminée.
- Expliquer pourquoi la méthode utilisée dans l'exercice 2 ne permet pas de répondre à la question.

Partie B : Calculs d'aires

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x$ rad.

Les éléments géométriques utilisés par la suite sont décrits dans la figure ci-dessous :



- Exprimer en fonction de x les distances OC , OS et IT
- Exprimer en fonction de x les aires des triangles OIM et OIT
- Exprimer en fonction de x l'aire du secteur angulaire IOM (la voir comme une fraction à déterminer de l'aire de $\mathcal{C}$)
- Déduire des questions précédentes que

$$\sin x < x < \tan x$$

Partie C : Détermination de la limite

- Déduire de la question précédente l'encadrement suivant : Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ on a $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
- En utilisant le théorème des gendarmes, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(x)}$. Puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.
- Etudier la parité de la fonction f définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.
- En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin(x)}$.
- Conclure.