Correction du devoir Maison 5 : Les Limites

Exercice 1.

1. Soit $f(x) = -x + \cos x$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Poser $v(x) = -x + 1$)

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a aussi $f(x) \leq -x + 1$.

   Ce qui implique $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1)$

   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1) = -\infty$.

   Par conséquent, et d'après le théorème de comparaison on a :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x^4}}{x^4}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $4 + x^4 \geq 4$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $g(x) \geq \dfrac{2}{x^4}$.

   Ce qui implique $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \geq \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x^4}$

   Or, on pose $X = x^4$ et on trouve $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x^4} = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{2}{X} = +\infty$.

   Par conséquent, et d'après le théorème précédent, on a :

   $$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = -3 + \dfrac{\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, on peut dire que $-3 - \dfrac{1}{x} \leq -3 + \dfrac{\sin x}{x} \leq -3 + \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

Ce qui implique que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 - \dfrac{1}{x}\right) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 + \dfrac{\sin(x)}{x}\right) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 + \dfrac{1}{x}\right)$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 - \dfrac{1}{x}\right) = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 + \dfrac{1}{x}\right) = -3$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, on trouve que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$$

Exercice 3. Une limite à connaître : Le but de cette partie est de déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Partie A : Etude du problème

1. Cette limite est une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».
2. Essayons d'appliquer cette méthode.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

   Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$. Il faut préciser si la limite est en 0^+ ou 0^-.

   Regardons par exemple pour 0^+. Alors on a :

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$$

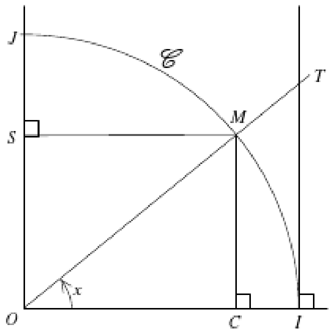
   Mais $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$.

   Donc l'inégalité précédente ne nous apporte aucune information. (Idem pour $x \to 0^-$)

Partie B : Calculs d'aires

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = x$ rad.

Les éléments géométriques utiliser par la suite sont décrits dans la figure ci-dessous :



1. D'après le chapitre de trigonométrie on a

$$OC = \cos(x)$$

$$OS = \sin(x)$$

$$IT = \tan(x)$$

2. L'aire d'un triangle est $\mathscr{A} = \frac{base \times hauteur}{2}$.

Donc $\mathscr{A}_{OIM} = \frac{OI \times MC}{2} = \frac{1 \times \sin(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$

Et $\mathscr{A}_{OIT} = \frac{OI \times IT}{2} = \frac{1 \times \tan(x)}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$

3. L'aire du secteur angulaire est proportionnel à l'aire du cercle qui vaut πR^2 (où R est le rayon du cercle et pour un angle de 2π).
Donc l'aire du secteur angulaire vaut

$$\frac{\pi R^2 \times x}{2\pi} = \frac{R^2 \times x}{2}$$

Ici $R = 1$. Donc l'aire du secteur considéré est $\frac{x}{2}$.

4. Sur la figure, il est clair que **pour tout $\mathbf{x} \in]\mathbf{0}; \frac{\pi}{\mathbf{2}}[$:**

$$\begin{aligned} & \mathscr{A}_{OIM} < \mathscr{A}_{secteur} < \mathscr{A}_{OIM} \\ \iff & \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2} \\ \iff & \sin(x) < x < \tan(x) \end{aligned}$$

Partie C : Détermination de la limite

1. **Pour tout $\mathbf{x} \in]\mathbf{0}; \frac{\pi}{\mathbf{2}}[$** on a

$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

$$\begin{aligned} \iff & \frac{\sin(x)}{\sin(x)} < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\tan(x)}{\sin(x)} \quad \text{car } \sin(x) > 0 \\ \iff & 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{1}{\sin(x)} \\ \iff & 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente on a

$$\lim_{x \to 0^+} 1 \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos(x)}$$

Remarque : l'inégalité du 1. est stricte, mais elle n'implique qu'une inégalité large!!

Or $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1$. Donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1$.

Remarque : On fait la limite en 0^+ car on utilise une inégalité valable uniquement sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

On peut alors en déduire que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

3. L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.
De plus $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x)$.
Donc la fonction f est paire.

4. Par conséquent $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1$.

5. Les limites à droite et à gauche de 0 sont égales. On conlut dans ce cas :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$