Correction de l'interrogation n°9

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

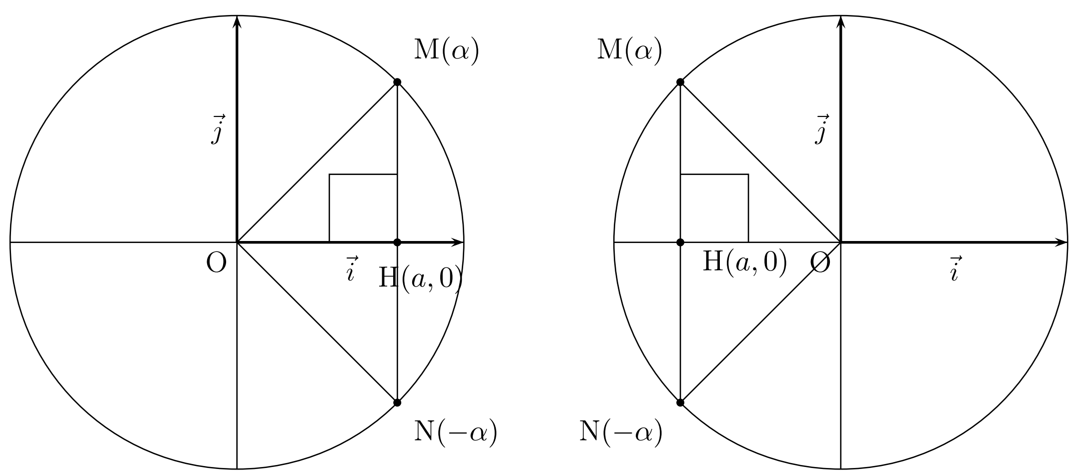
Propriété 1. Soit x et α deux réels alors :

$$\cos x = \cos\alpha \Longleftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration :

Distinguons plusieurs cas :

- Si $\mid a \mid > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \cos x \leq 1$
- Si $\mid a \mid < 1$, la perpendiculaire à $(O, \vec{i})$ passant par $H(a; 0)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points M et N du cercle trigonométrique ayant pour absisse a. L'équation $\cos x = a$ admet donc deux solutions dans $]-\pi; \pi]$, α et donc $-\alpha$ où $\alpha \in [0; \pi]$, les solutions dans $\mathbb{R}$ sécrivent alors $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



- Si $a = 1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour absisses 1. L'équation $\cos x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi; \pi]$: $x = 0$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = -1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour absisses -1. L'équation $\cos x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi; \pi]$: $x = \pi$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2.

1. Résoudre dans les équations suivantes :
   (a) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \cos\theta = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow \theta = \pm\frac{5\pi}{6}$$

   (b) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, donc

$$\theta = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

   (c) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ avec $\theta \in [0;2\pi[$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1}}{2} \Longleftrightarrow \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

   (d) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, donc

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. En utilisant le fait que $\sin x$ et $\cos x$ appartiennent à l'intervalle $[-1;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ et $-3 \leq -3\cos\theta \leq 3$

$$-5 \leq \sin 2\theta - 3\cos\theta - 1 \leq 3$$

3. Résoudre $2\sin^3 x - 4\sin^2 x + \sin x + 7 = 0$. On commence par poser $X = \sin x$ On remarque que -1 est racine évidente du polynôme précédent, en effet : $-2 - 4 - 1 + 7 = 0$
   Par conséquent on obtient

$$2X^3 - 4X^2 + X + 7 = 0 \Longleftrightarrow (X+1)(2X^2 + bX + 7) = 0 \Longleftrightarrow 2X^3 + (2+b)X^2 + (b+7)X + 7 = 0$$

   Par identification, on obtient : $2 + b = -4 \Longleftrightarrow b = -6$ et $b + 7 = 1 \Longleftrightarrow b = -6$
   On résout l'équation suivante : $(X+1)(2X^2 - 6X + 7) = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 56 < 0$, par conséquent l'équation admet une unique solution qui est -1
   Finalement $\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Correction de l'interrogation n°9

Exercice 1. ROC

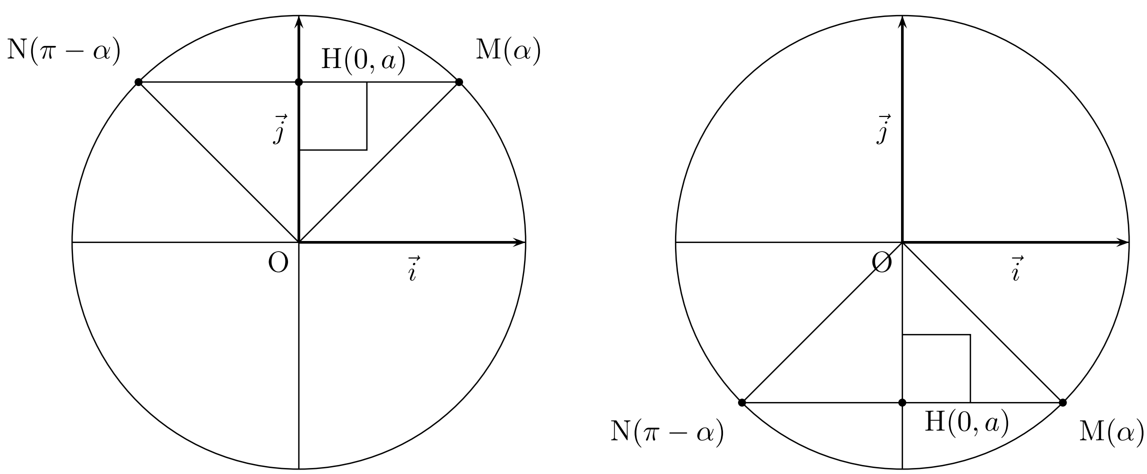
Démontrer la propriété suivante :

> **Propriété 2.** *Synthèse*
> Soit x et α deux réels alors :
>
> $$\sin x = \sin\alpha \Longleftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration :

Distinguons plusieurs cas :

- Si $\mid a \mid > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Si $\mid a \mid < 1$, la perpendiculaire à $(O, \vec{j})$ passant par $H(0; a)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points ; il existe donc deux points M et N du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée a. L'équation $\sin x = a$ admet donc deux solutions dans $]-\pi;\pi]$, α et $\pi - \alpha$ où $\alpha \in]-\pi;\pi]$ [1], les solutions dans $\mathbb{R}$ sécrivent alors $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



- Si $a = 1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnées 1. L'équation $\sin x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi;\pi]$: $x = \dfrac{\pi}{2}$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = -1$ les points M et N définis précédemment sont confondus et ont pour ordonnée -1. L'équation $\sin x = a$ admet donc une unique solution dans $]-\pi;\pi]$: $x = -\dfrac{\pi}{2}$. Dans $\mathbb{R}$ les solutions s'écrivent $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2.

1. Résoudre dans les équations suivantes :

   (a) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$

   $$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$$

   (b) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, donc

   $$\theta = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

   (c) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ avec $\theta \in [0;2\pi[$

   $$\sin\theta = -\frac{\sqrt{1}}{2} \Longleftrightarrow \sin\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

   (d) $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, donc

   $$\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. En utilisant le fait que $\sin x$ et $\cos x$ appartiennent à l'intervalle $[-1;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ et $-3 \leq 3\cos\theta \leq 3$

   $$-5 \leq \sin 2\theta + 3\cos\theta - 1 \leq 3$$

3. Résoudre $2\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ On commence par poser $X = \sin x$ On remarque que 1 est racine évidente du polynôme précédent, en effet : $-2 - 1 + 1 - 2 = 0$
   Par conséquent on obtient

   $$2X^3 - 4X^2 + X + 7 = 0 \Longleftrightarrow (X-1)(2X^2 + bX + 2) = 0 \Longleftrightarrow 2X^3 + (-2+b)X^2 + (-b+2)X - 2 = 0$$

   Par identification, on obtient : $-2 + b = -1 \Longleftrightarrow b = 1$ et $-b + 2 = 1 \Longleftrightarrow b = 1$
   On résout l'équation suivante : $(X+1)(2X^2 + X + 2) = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 16 < 0$, par conséquent l'équation admet une unique solution qui est 1
   Finalement $\sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$