Correction de l'interrogation n°8

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

Propriété 1. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout $k \neq 0$ on a :

1. $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$
2. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$

On admet que, pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a : $(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$

Démonstration :

1. En utilisant deux fois la relation de Chasles on a :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}; k\vec{v})(2\pi)$$

Cas 1 : $k > 0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et donc : $(k\vec{u}, \vec{u}) = 0(2\pi)$. De même $(\vec{v}; k\vec{v}) = 0(2/pi)$, et donc :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$$

Cas 2 : $k < 0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ n'ont pas le même sens et donc : $(k\vec{u}, \vec{u}) = \pi(2\pi)$. De même $(\vec{v}; k\vec{v}) = \pi(2/pi)$, et donc :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = 2\pi + (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$$

ce qui donne :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})(2\pi)$$

2. On applique la propriété précédente pour $k = -1$

Exercice 2. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O munie d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $OI = \vec{i}$ et $OJ = \vec{j}$. Les points A et B sont tels que :

$$\widehat{IOA} = 60^\circ \qquad \text{et } \widehat{IOB} = -105^\circ$$

1. Une mesure en radians des angles orientés :
   (a) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ est $\dfrac{\pi}{3}$ rad
   (b) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ est $-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{7\pi}{12}$ rad
   (c) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{11\pi}{12}$ rad

2. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, on en déduit :

$$-9 \leq \sin 2\theta + \cos\theta - 7 \leq -5$$

3. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{79\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{3} - 2\pi\right) + \sin\left(\dfrac{79\pi}{6} - 7 \times 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1-1}{2} = 0$

Correction de l'interrogation n°8

Exercice 1. ROC

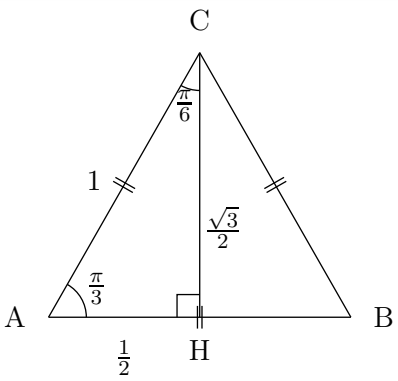
Démontrer la propriété suivante :

Propriété 2. $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, enfin $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Démonstration :

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus de $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec un de ses hauteurs qui au passage, d'après le théorème de Pythagore mesure :

$$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Dans le triangle AHC rectangle en H on a :

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{AH}{AC}=\frac{1}{2}\qquad\cos\frac{\pi}{6}=\frac{CH}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\tan\frac{\pi}{6}=\frac{AH}{CH}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{CH}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\cos\frac{\pi}{3}=\frac{AH}{AC}=\frac{1}{2}\qquad\tan\frac{\pi}{3}=\frac{CH}{AH}=\sqrt{3}$$

Exercice 2. ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}$
AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})=\dfrac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB})=\dfrac{\pi}{3}$
On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés

1. (a) Comme AEB est équilatéral on a $AE=AB$ et comme $ABCD$ est un carré on a $AE=AD$ donc le triangle ADE est isocèle

   (b) On sait que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}$ puisque $ABCD$ est un carré et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=\dfrac{\pi}{3}$ puisque AEB est équilatéral
   De plus $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. Par conséquent :

$$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

Puisque AED est un triangle isocèle $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \dfrac{\pi - \dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{5\pi}{12}$

2. En exploitant les triangles équilatéraux et le carré on a :

$$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

Le triangle EBF est rectangle isocèle puisque $EB = BF$, par conséquent :

$$(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BE})}{2} = \frac{\pi - \dfrac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

3. (a) Le relation de Chasles donne :

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi$$

(b) L'angle $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$ est plat d'après la question précédente, ce qui signifie que les points E, D et F sont alignés