Correction de l'interrogation n°7

Exercice 1. ROC
Démontrer la propriété suivante :

THÉORÈME 1. On considère un polynôme P où $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dans le cas où le discriminant $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines du polynôme P on a :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de P		signe de a	0	opposé de a	0	signe de a	

Prérequis : On suppose connu, pour démontrer cette propriété, la factorisation d'un polynôme du second degré.

Démonstration :

Cas 1 - $\Delta > 0$: Soit x_1 et x_2 ses racines, avec $x_1 < x_2$. On a alors :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Établissons le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	opposé de a	0	signe de a	

Exercice 2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 4x + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$$

donc le trinôme n'a pas de racines

2. $4x + 3x^2 - 1 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 12 = 28$$

donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
On obtient : $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{28}}{6} = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{27}}{3}$ On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
signe de $3x^2+6x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}] \cup [\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}; +\infty[$

3. $x^3-2x^2+x-2=0$ On a : $8-8+2-2=0$ donc 2 est racine évidente du polynôme. On peut donc écrire :

$$x^3-2x^2+x-2 = (x-2)(x^2+bx+1) = x^3+(b-2)x^2+(1-2b)x+1$$

Par identification on obtient : $b-2=-2 \iff b=0$ et $1-2b=1 \iff b=0$
Par conséquent :

$$\begin{aligned} & x^3-2x^2+x-2=0 \\ \iff & (x-2)(x^2+1)=0 \\ \iff & x=2 \text{ ou } x^2=-1 \text{ impossible dans } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Au final $x^3-2x^2+x-2=0$ quand $x=2$

Correction de l'interrogation n°7

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

> **Propriété 1.** Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ deux trinômes du second degré. P et Q sont égaux si, et seulement si $a = a'; b = b'$ et $c = c'$

Démonstration :

On dit que $P = Q$ si, et seulement si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e : Supposons que $P = Q$, on a alors :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Si on choisit $x = 0$ on obtient : $c = c'$ et l'égalité devient :

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Si on choisit $x = 1$ on obtient : $a + b = a' + b'$
Si on choisit $x = -1$ on obtient : $a - b = a' - b'$
En soustrayant, puis en ajoutant, membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$2b = 2b' \text{ et } 2a = 2a'$$

Au final : $a = a'; b = b'$ et $c = c'$ La réciproque est évidente i.e si $a = a'; b = b'$ et $c = c'$ alors $P = Q$

Exercice 2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $-4x^2 + 2x - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 96 = 4 - 92$$

   donc le trinôme n'a pas de racines

2. $2x - 2x^2 - 1 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$$

   donc le trinôme n'a pas de racines
   On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $3x^2 + 6x - 2$	$-$

   $2x - 2x^2 - 1$ n'est jamais positif ou nul.

3. $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$
   On a : $-1 - 2 - 1 + 4 = 0$ donc -1 est racine évidente du polynôme $x^3 - 2x^2 + x + 4$
   On peut écrire :

$$x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x + 1)(x^2 + bx + 4) = x^3 + (b + 1)x^2 + (b + 4)x + 4$$

Par identification on obtient : $b+1=-2$ et $b+4=1$. Dans les deux cas on trouve $b=-3$ ce qui nous permet de résoudre l'équation de départ :

$$\begin{aligned} & x^3-2x^2+x+4=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x+1)(x^2-3x+4) \\ \Longleftrightarrow\quad & x=-1 \text{ ou } x^2-3x+4=0 \end{aligned}$$

Le discriminant de x^2-3x+4 vaut $\Delta=b^2-4ac=9-16=-7$
Au final on peut conclure que $x^3-2x^2+x+4=0$ seulement si $x=-1$