Correction de l'interrogation n°6

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

THÉORÈME 1. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Le trinôme se factorise ainsi :

- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

On rappelle et on admettra que $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

Démonstration :

On a : (si $\Delta > 0$)

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)
\end{aligned}
$$

Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

Exercice 2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 5x - 10 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 80 = 105$$

donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

On obtient : $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{105}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{105}}{4}$

2. $3x^2 + 6x - 2 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 24 = 60$$

donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

On obtient : $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{60}}{6} = \dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$ On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$		$\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$		$+\infty$
signe de $3x^2+6x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}] \cup [\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}; +\infty[$

3. Si $x \neq 1$ on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-1} = x \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-1)x = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$$

Au final $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Correction de l'interrogation n°6

Exercice 1. ROC

Démontrer la propriété suivante :

> **THÉORÈME 2.** Soit $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors on a :
>
> $$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Démonstration :

On met a en facteur ($a \neq 0$) : $$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Or : $$x^2+\frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Au final : $$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Exercice 2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2-4x-8=0$

$$\Delta = b^2-4ac = 16+32 = 48$$

donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

On obtient : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{48}}{2} = 2-\sqrt{12} = 2-2\sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{48}}{2} = 2+\sqrt{12} = 2+2\sqrt{3}$

2. $4x^2+7x-1 \geq 0$

$$\Delta = b^2-4ac = 49+16 = 65$$

donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

On obtient : $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{65}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{65}}{8}$ On dresse enfin le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-7-\sqrt{65}}{8}$		$\frac{-7+\sqrt{65}}{8}$		$+\infty$
signe de $3x^2+6x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; \dfrac{-7-\sqrt{65}}{8}] \cup [\dfrac{-7+\sqrt{65}}{8}; +\infty[$

3. Si $x \neq 1$ on a :

$$\frac{10}{x-1} = 3x$$
$$\iff 3(x-1)x = 10$$
$$\iff 3x^2-3x-10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 120 = 129$$

Au final $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{129}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{129}}{6}$