Correction de l'interrogation n°5

Exercice 1. ABC est un triangle. M, N et P sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AC}$$

1. On a :

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} \Longleftrightarrow -2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow M = bar\{(A,-2);(B,3)\}$$

Puis, on a aussi :

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BN}+\frac{1}{4}\overrightarrow{NC} \Longleftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{NB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow 3\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow N = bar\{(B,3);(C,1)\}$$

Et, enfin :

$$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PC} \Longleftrightarrow 2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow P = bar\{(A,2);(C,-1)\}$$

2. Démontrons, grâce à l'associativité du barycentre que G est sur les droites (AN), (BP) et (CM)
Comme $G = bar\{(A,2);(B,-3);(C,-1)\}$ et comme d'après la question 1. $P = bar\{(A,2);(C,-1)\}$, il vient :

$$G = bar\{(P,1);(B,-3)\} \Longrightarrow G \in (BP)$$

Poursuivons, comme d'après la question 1. $M = bar\{(A,-2);(B,3)\} = bar\{(A,2);(B,-3)\}$, il vient cette fois :

$$G = bar\{(M,-1);(C,-1)\} \Longrightarrow G \in (CM)$$

Enfin, et toujours d'après la question 1. $N = bar\{(B,3);(C,1)\} = bar\{(B,-3);(C,-1)\}$, nous avons alors :

$$G = bar\{(N,-4);(A,2)\} \Longrightarrow G \in (AN)$$

Ainsi les droites (AN), (BP) et (CM) sont concourantes en G barycentre des points $(A,2)$, $(B,-3)$ et $(C,-1)$

Exercice 2. ROC

Démontrer la propriété suivante :

THÉORÈME 1. Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ et H le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \Longleftrightarrow G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Démonstration :

Soit $H = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors :

$$\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$$

Soit $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{GH} + \alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GH} + +\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow G = bar\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Correction de l'interrogation n°5

Exercice 1. $ABCD$ est un tétraèdre de l'espace.

1. Comme G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, -1)$ et $(D, 2)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{-1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

   Cette relation permet de construire comme sur la figure ci-dessous

2. I est le milieu de $[BD]$ donc $I = bar\{(B, 1); (D, 1)\} = bar\{(B, 2); (D, 2)\}$ donc d'après l'associativité du barycentre :

$$G = bar\{(A, 1); (B, 2); (C, -1); (D, 2)\} = bar\{(A, 1); (I, 4); (C, -1)\}$$

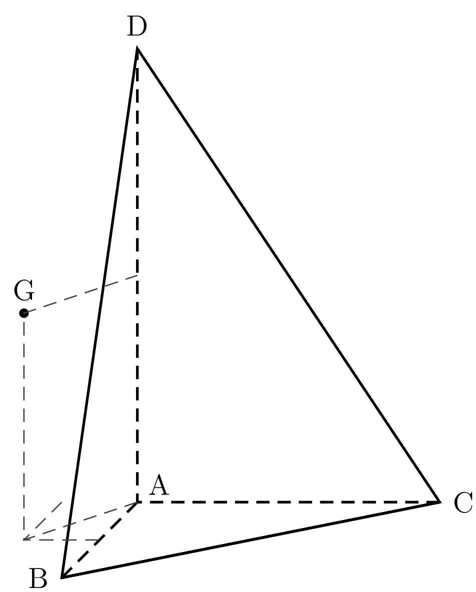
   on en déduit que :

$$\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

   et donc :

$$4\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \iff 4\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AC}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires donc les droites (AC) et (GI) sont parallèles.



Démonstration :

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, de $[AC]$ et de $[AB]$.
$I = bar\{(B,1);(C,1)\}$; $J = bar\{(A,1);(C,1)\}$ et $K = bar\{(A,1);(B,1)\}$. De plus $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$. D'après l'associativité du barycentre il vient :

- $G = bar\{(A,1);(I,2)\}$ et donc $G \in (AI)$
- $G = bar\{(B,1);(J,2)\}$ et donc $G \in (BJ)$
- $G = bar\{(C,1);(K,2)\}$ et donc $G \in (CK)$

En conclusion G est le point d'intersection des médianes du triangle ABC ; G est donc le centre de gravité de ABC