Correction de l'interrogation n°4

<u>Exercice</u> 1.

1. On utilise pour cette construction la relation :

$$\overrightarrow{DG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{DC}$$

   De plus G est le barycentre de $\{(D,51);(C,85)\}$ donc de $\{(D,3);(C,5)\}$ donc :

$$\overrightarrow{DG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{DC}$$

2. On considère le point G, barycentre de $(A,5)$ et $(B,6)$, on a alors :

$$5\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} = 11\overrightarrow{MG} \forall M \in P$$

   par conséquent :

$$\|\ 11\overrightarrow{MG}\ \| = 33 \Longleftrightarrow \|\ \overrightarrow{MG}\ \| = 3$$

   L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G et de rayon 3.

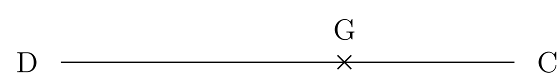
3. On introduit les points H et H' barycentre, respectivement de $\{(A,10);(B,9)\}$ et $\{(A,7);(B,-8)\}$. On a donc les Ã©galités vectorielles suivantes $\forall M \in P$:

$$10\overrightarrow{MA} - 9\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH} \text{ et } 7\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MH'}$$

   L'ensemble des points M du plan tels que $\|\ 10\overrightarrow{MA} - 9\overrightarrow{MB}\ \| = \|\ 7\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB}\ \|$ est donc l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\ \overrightarrow{MH}\ \| = \|\ -\overrightarrow{MH'}\ \| \Longleftrightarrow MH = MH'$$

   L'ensemble cherché est donc la médiatrice de $[HH']$



Ci-contre une représentation graphique répondant à la question 1

Exercice 2. ROC

Démontrer la propriété suivante :

THÉORÈME 1. Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On a :

$$\text{G barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Longleftrightarrow \forall M \text{ point du plan, } \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Démonstration :

$\Rightarrow$) Si G est le barycentre de (A,α) et (B,β) on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$

De plus : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{MG}=\alpha\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG}\right)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\forall$ point M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Il vient pour $M=G$: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$, et comme $\alpha+\beta\neq 0$, G est bien le barycentre de (A,α) et (B,β)

Correction de l'interrogation n°4

Exercice 1.

1. On utilise pour cette construction la relation :

$$\overrightarrow{DG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{DC}$$

De plus G est le barycentre de $\{(D,39);(C,65)\}$ donc de $\{(D,3);(C,5)\}$ donc :

$$\overrightarrow{DG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{DC}$$

2. On considère le point G, barycentre de $(A,5)$ et $(B,22)$, on a alors :

$$5\overrightarrow{MA} + 22\overrightarrow{MB} = 27\overrightarrow{MG}\forall M \in P$$

par conséquent :

$$\| \, 27\overrightarrow{MG} \, \| = 27 \iff \| \, \overrightarrow{MG} \, \| = 1$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G et de rayon 1.

3. On introduit les points H et H' barycentre, respectivement de $\{(A,6);(B,-7)\}$ et $\{(A,9);(B,-8)\}$. On a donc les Ã©galités vectorielles suivantes $\forall M \in P$:

$$6\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MH} \text{ et } 9\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH'}$$

L'ensemble des points M du plan tels que $\| \, 6\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} \, \| = \| \, 9\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} \, \|$ est donc l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\| -\overrightarrow{MH} \, \| = \| \, \overrightarrow{MH'} \, \| \iff MH = MH'$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice de $[HH']$

Ci-contre une représentation graphique répondant *à* la question 1

Exercice 2. ROC

Démontrer la propriété suivante :

THÉORÈME 2. Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. On a :

$$\text{G barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Démonstration :

$\Rightarrow$) Supposons que G barycentre de (A,α) et (B,β), d'après le théorème 2 on a pour $M = A$:

$$\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \text{ puisque } \alpha+\beta \neq 0$$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ce qui donne :

$$\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG} \Longleftrightarrow \beta\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{GB} = \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{AG}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Comme $\alpha+\beta \neq 0$, G est le barycentre de (A,α) et (B,β)