Correction de l'interrogation n°3

Exercice 1. Composition

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et $[4;+\infty[$ par :
$$f(x) = (x+5)^2 \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x-4}$$
$f = u \circ v$ où $u(x) = x^2$ et $v(x) = x+5$
$g = w \circ z$ où $w(x) = \sqrt{x}$ et $z(x) = x-4$
2. Sens de variation de la fonction f sur $[-5;+\infty[$
D'après 1, $f = u \circ v$ et la fonction v est strictement croissante sur $[-5;+\infty[$
Cherchons $v\left([-5;+\infty[\right)$: Si $x \in [-5;+\infty[$ on a : $x \geq -5$ et donc $x+5 \geq 0$
$$\underline{\text{Conclusion :}}\ v\left([-5;+\infty[\right) = \mathbb{R}^+$$
u étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en conclut que f est strictement croissante sur $[-5;+\infty[$
Sens de variation de la fonction f sur $]-\infty;-5]$
D'après 1, $f = u \circ v$ et la fonction v est strictement croissante sur $]-\infty;-5]$
Cherchons $v\left(]-\infty;-5]\right)$: Si $x \in]-\infty;-5]$ on a : $x \leq -5$ et donc $x+5 \leq 0$
$$\underline{\text{Conclusion :}}\ v\left([-5;+\infty[\right) = \mathbb{R}^-$$
Et comme u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en conclut que f est strictement décroissante sur $]-\infty;-5]$
3. Sens de variation de la fonction g sur $[4;+\infty[$
D'après 1, $g = w \circ z$ et la fonction z est strictement croissante sur $[4;+\infty[$
Cherchons $w\left([4;+\infty[\right)$: Si $x \in [4;+\infty[$ on a : $x \geq 4$ et donc $x-4 \geq 0$
$$\underline{\text{Conclusion :}}\ w\left([4;+\infty[\right) = \mathbb{R}^+$$
z étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en conclut que f est strictement croissante sur $[4;+\infty[$

4. On obtient C_f à partir de la représentation graphique de la fonction carré par une translation de vecteur $-5\vec{i}$ (en effet $f(x) = u(x+5)$), puis on obtient C_g à partir de la représentation graphique de la fonction racine carrée par une translation de vecteur $4\vec{i}$ (en effet $g(x) = w(x-4)$).

Exercice 2. ROC

Démontrer la propriété suivante :

> **Propriété 1.** Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I et g une fonction décroissante sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur I

Démonstration :

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$ alors $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f(I)$ et, comme f est décroissante sur I, $f(a) \geq f(b)$
Comme de plus g est décroissante sur $f(I)$, alors $g[f(a)] \leq g[f(b)]$ i.e $g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$, donc $g \circ f$ est croissante sur I

Correction de l'interrogation n°3

Exercice 1. Composition

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}-\{2\}$ par :
$$f(x)=(x-3)^2 \qquad\qquad g(x)=\frac{1}{x}-2$$
$f=u\circ v$ où $u(x)=x^2$ et $v(x)=x-3$
$g=w\circ z$ où $z(x)=\dfrac{1}{x}$ et $z(x)=x-2$
2. Sens de variation de la fonction f sur $[3;+\infty[$
D'après 1, $f=u\circ v$ et la fonction v est strictement croissante sur $[3;+\infty[$
Cherchons $v\left([3;+\infty[\right)$: Si $x\in[3;+\infty[$ on a : $x\geq 3$ et donc $x-3\geq 0$
$$\underline{\text{Conclusion : }}\ v\left([3;+\infty[\right)=\mathbb{R}^+$$
u étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en conclut que f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$
Sens de variation de la fonction f sur $]-\infty;3]$
D'après 1, $f=u\circ v$ et la fonction v est strictement croissante sur $]-\infty;3]$
Cherchons $v\left(]-\infty;3]\right)$: Si $x\in]-\infty;3]$ on a : $x\leq 3$ et donc $x-3\leq 0$
$$\underline{\text{Conclusion : }}\ v\left([3;+\infty[\right)=\mathbb{R}^-$$
Et comme u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en conclut que f est strictement décroissante sur $]-\infty;3]$
3. $g=z-2$, donc g a les mêmes variations que z, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$
4. On obtient C_f à partir de la représentation graphique de la fonction carré par une translation de vecteur $-5\vec{i}$ (en effet $f(x)=u(x+5)$, puis on obtient C_g à partir de la représentation graphique de la fonction racine carrée par une translation de vecteur $-2\vec{j}$ (en effet $g=z-2$).

Exercice 2. ROC

Démontrer la propriété suivante :

> **Propriété 2.** Si f est une fonction croissante sur un intervalle I et g une fonction décroissante sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g\circ f$ est décroissante sur I

Démonstration :

Soient a et b deux réels de I tels que $a\leq b$ alors $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f(I)$ et, comme f est croissante sur I,$f(a)\leq f(b)$
Comme de plus g est décroissante sur $f(I)$, alors $g[f(a)]\geq g[f(b)]$ i.e $g\circ f(a)\geq g\circ f(b)$, donc $g\circ f$ est décroissante sur I