Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1.

1. u et v sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = 1 - 2x$
   $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $(u + v)(x) = u(x) + v(x) = x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $uv(x) = u(x)v(x) = x^2(1 - 2x)$
3. $\dfrac{u}{v}(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, par conséquent $\dfrac{u}{v}$ est définie pour $v(x) \neq 0$.
   Or, $1 - 2x = 0$ pour $x = 0,5$ donc $D_{\frac{u}{v}} = \mathbb{R} - \{0,5\}$

Exercice 2. ROC

Propriété 1. Si f est croissante sur I et $\lambda > 0$ (respectivement $\lambda < 0$) alors la fonction λf est croissante (respectivement décroissante) sur I

Démonstration :

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$:

– Si $\lambda > 0$
  Comme f est croissante sur I on a :

$$f(a) \leq f(b) \Longleftrightarrow \lambda f(a) \leq \lambda f(b) \textbf{ car } \lambda > 0$$

  Donc la fonction $f + \lambda$ est croissante sur I

– Si $\lambda < 0$
  Comme f est croissante sur I on a :

$$f(a) \leq f(b) \Longleftrightarrow \lambda f(a) \geq \lambda f(b) \textbf{ car } \lambda < 0$$

  Donc la fonction $f + \lambda$ est décroissante sur I

Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1. Opérations sur les fonctions

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 3 \qquad\qquad g(x) = x^2 + 1$$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, par conséquent $\dfrac{f}{g}$ est définie si $g(x) \neq 0$

Or, $g(x) = 1 + x^2 \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, donc $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1} = \dfrac{2x^2+2+1}{x^2+1} = \dfrac{2(x^2+1)}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1} = 2 + \dfrac{1}{x^2+1}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $fg(x) = f(x)g(x) = (2x^2+3)(x^2+1)$

Exercice 2. ROC

Propriété 2. Si f est une fonction monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les fonctions f et $f + \lambda$ ont même sens de variation sur I

Démonstration :

- Si f est décroissante sur I :
  Soit a et b deux réels de I tels que $a \leq b$. Comme f est décroissante sur I on a :

$$f(a) + \lambda \geqslant f(b) + \lambda$$

  Donc la fonction $f + \lambda$ est décroissante sur I
- Si f est croissante sur I :
  Soit a et b deux réels de I tels que $a \leq b$. Comme f est croissante sur I on a :

$$f(a) + \lambda \leq f(b) + \lambda$$

  Donc la fonction $f + \lambda$ est croissante sur I