Correction de l'interrogation n°22

Exercice 1. ROC (4 points)

Démontrer cette propriété :

Propriété 1 :

Quels que soient les réels a et b :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Preuve

Choisissons un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.
A et B sont les points de $\mathscr{C}$ tels que, en radians, $(\vec{i},\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OB}) = b$. Dans ce cas $A(\cos a;\sin a)$ et $B(\cos b;\sin b)$

De plus

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA},\vec{i}) + (\vec{i};\overrightarrow{OB}) = b-a$$

Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a \sin b = OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos(b-a)$$

Exercice 2. (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AE]$ et $[CG]$

On note L le point tel que $3\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EI}$

On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1. Etant donné que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, on a :

$$\boxed{J(0;0;0.5) \qquad K(1;1;0.5) \qquad \text{et} \qquad H(0;1;1)}$$

2. Remarquons que $E(0;0;1)$ et $I(0.5;0;0)$. Notons $(x;y;z)$ les coordonnées de L, on a alors $\overrightarrow{EL}(x;y;z-1)$ et on a aussi $\overrightarrow{EI}(0.5;0;-1)$. Par conséquent

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{EI}\left(\frac{1}{3};0;-\frac{2}{3}\right)$$

Et donc comme $\overrightarrow{EL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EI}$:

$$x = \frac{1}{3} \qquad y = 0 \qquad z = -\frac{2}{3}+1 = \frac{1}{3}$$

On conclut donc que :

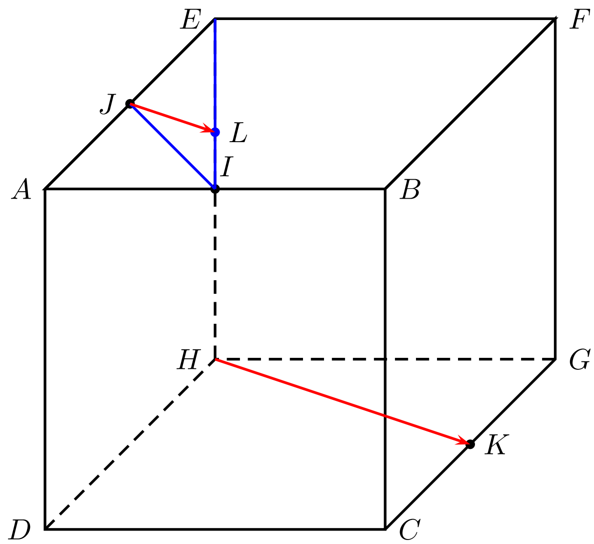
$$\boxed{L\left(\frac{1}{3};0;\frac{1}{3}\right)}$$

3. $\overrightarrow{JL}\left(\dfrac{1}{3};0;\dfrac{1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{HK}\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$. On remarque alors que :

$$\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{JL}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont donc colinéaires.

4.



Correction de l'interrogation n°22

Exercice 1. ROC (4 points)

Démontrer cette propriété :

Propriété 2 :
Soit A et B deux points quelconque du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Preuve

$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2 + IA^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - MI^2 - IB^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Exercice 2. (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. On considère le point K défini par :

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

1. Montrer que $\overrightarrow{KB} = \alpha\overrightarrow{KC} + \beta\overrightarrow{KG}$ où α et β sont des réels à déterminer.

$$\begin{array}{rc}
 & 2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG} \\
\Longleftrightarrow & 2\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow & 2\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow & 2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow & \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KC} - 3\overrightarrow{KG} \qquad CQFD \text{ avec } \alpha = 2 \text{ et } \beta = -3
\end{array}$$

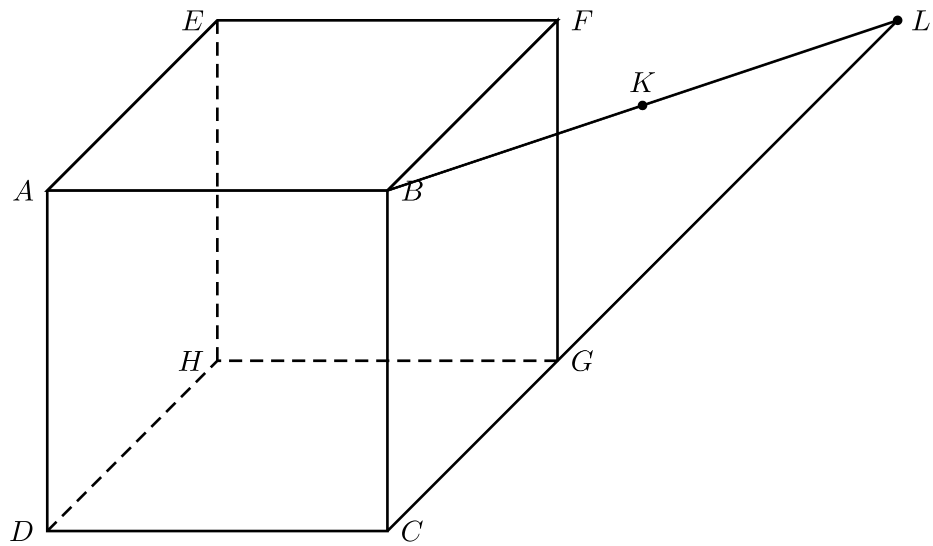
2. D'après la question précédente on a :

$$\overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KC} - 3\overrightarrow{KG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KG}$$

   et donc K est le barycentre de B, C et G avec 1, -2 et 3 comme coefficients.
3. La question 1. prouve que les points K, B, C et G sont coplanaires et donc que $K \in (BCG)$
4. Construction de K : on peut comencer par construire le barycentre L de $(G, 3)$ et $(C; -2)$. Ainsi :

$$\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{CG}$$

   Il reste alors à construire le barycentre K de $(B, 1)$ et $(C, 1)$, i.e le milieu de $[BL]$.


E
F
L
K
A
B
H
G
D
C